COLLECTION MYRIADE

maths

CYCLE 4

4e

Sous la direction de

Marc Boullis

Marc Boullis

Maxime Cambon

Yannick Danard

Virginie Gallien

Élodie Herrmann

Isabelle Meyer

Yvan Monka

Stéphane Percot

Bordas

sommaire

Direction éditoriale : Julien Barret
Édition : Béatrice Jovial-Vernet et Nicole Rêve
Couverture : Jean-François Saada et Pierre Taillemite
Fabrication : Jean-Philippe Dore
Réalisation et schémas : Soft Office

Livret Algorithmique et programmation

I. Le programme

Algorithmique et programmation

Au cycle 4, les élèves s'initient à la programmation, en développant dans une démarche de projet quelques programmes simples, sans viser une connaissance experte et exhaustive d'un langage ou d'un logiciel particulier. En créant un programme, ils développent des méthodes de programmation, revisitent les notions de variables et de fonctions sous une forme différente, et s'entraînent au raisonnement.

Attendu de fin de cycle

- Écrire, mettre au point et exécuter un programme simple.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
■ Décomposer un problème en sous-problèmes afin de structurer un programme ; reconnaître des schémas. ■ Écrire, mettre au point (tester, corriger) et exécuter un programme en réponse à un problème donné. ■ Écrire un programme dans lequel des actions sont déclenchées par des événements extérieurs. ■ Programmer des scripts se déroulant en parallèle. – Notions d'algorithme et de programme. – Notion de variable informatique. – Déclenchement d'une action par un évènement, séquences d'instructions, boucles, instructions conditionnelles.	■ Jeux dans un labyrinthe, jeu de Pong, bataille navale, jeu de nim, tic tac toe. ■ Réalisation de figure à l'aide d'un logiciel de programmation pour consolider les notions de longueur et d'angle. ■ Initiation au chiffrement (Morse, chiffre de César, code ASCII…). ■ Construction de tables de conjugaison, de pluriels, jeu du cadavre exquis… ■ Calculs simples de calendrier. ■ Calculs de répertoire (recherche, recherche inversée...). ■ Calculs de fréquences d'apparition de chaque lettre dans un texte pour distinguer sa langue d'origine : français, anglais, italien, etc.

II. Contexte du livret

L'année 2016-2017 sera une année de transition avec un grand nombre d'élèves novices en algorithmique. Cela évoluera au fil des années : les élèves auront abordé dans le thème *Espace et géométrie* du cycle 3 la programmation de déplacements ainsi que celle de constructions géométriques. Ils l'auront poursuivi en 5^{e} dans le thème *Algorithme et programmation*, développant ainsi les compétences qui décrivent l'activité mathématique : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer et communiquer.
Les activités proposées ici permettront une approche aussi bien adaptée au débutant qu'à celui ayant déjà quelques notions de programmation.
Le livret est découpé en deux grandes parties.
Dans une première partie, les concepts forts (instructions, boucles, variables, instructions conditionnelles, etc.) de l'algorithmique sont étudiés soit en mode *débranché*, soit en mode *branché* au travers de petits exercices simples.
En mode *débranché*, les élèves peuvent travailler chez eux ou en classe sur leur cahier, tandis qu'en mode *branché* ils utiliseront le logiciel Scratch pour réaliser les exercices proposés.
Dans la seconde partie du livret sont proposés des projets qui invitent les élèves à synthétiser les notions abordées et qui pourront servir de supports à des traces écrites basées sur des usages en situation. Les projets sont découpés en plusieurs étapes, permettant ainsi à chacun d'atteindre des objectifs intermédiaires dans sa réalisation. Les projets ne sont pas pour autant fermés et des invitations à améliorer le résultat obtenu sont présentes afin de stimuler l'imagination et la réflexion des élèves, mais également de permettre au professeur de gérer l'hétérogénéité de la classe.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

L'usage du logiciel Scratch au collège a été préconisé par l'Éducation Nationale pour diverses raisons, en particulier sa facilité d'appropriation, la puissance de programmation qu'il contient et sa gratuité.
On peut l'utiliser en ligne (https://scratch.mit.edu/) ou en le téléchargeant (https://scratch.mit.edu/scratch2download/).

Tous les fichiers Scratch liés au livret sont disponibles gratuitement sur le site www.bordas-myriade.fr.

Séquence 1	■ Exercice 4 : 5 programmes Scratch ■ Exercice 5 : 4 programmes Scratch
Séquence 2	■ Exercice 7 : 4 programmes Scratch ■ Exercice 8 : programme Scratch
Séquence 3	■ Exercice 12 : 4 programmes Scratch ■ Exercice 13 : 3 programmes Scratch
Séquence 4	■ Exercice 16 : 2 programmes Scratch ■ Exercice 17 : 3 programmes Scratch ■ Exercice 18 : programme Scratch
Séquence 5	■ Exercice 21 : 2 programmes Scratch ■ Exercice 22 : programme Scratch ■ Exercice 23 : programme Scratch
Projets	■ Projet 1 : 6 programmes Scratch ■ Projet 2 : 6 programmes Scratch ■ Projet 3 : 6 programmes Scratch ■ Projet 4 : 6 programmes Scratch ■ Projet 5 : programme Scratch

IV. Corrections et intentions pédagogiques

Séquence 1 – Instructions et algorithme

Le but de cette séquence est de faire prendre conscience que l'on peut, en ordonnant une suite d'instructions, schématiser une action ou faire exécuter à un programme ou un robot une suite d'actions précises.

1 Une journée de travail Niveau 1

Diverses situations du quotidien amènent à refaire les mêmes actions. Dans l'industrie, cela a permis la mécanisation de tâches répétitives par la programmation de robots spécialisés.
Voici un algorithme d'organisation d'une journée au collège :

Se lever
Prendre le petit déjeuner
Aller au collège
Suivre les cours du matin
Déjeuner
Suivre les cours de l'après-midi
Rentrer à la maison
Prendre un goûter
Faire ses devoirs

2 La chauve-souris Niveau 2

Cet exercice de repérage offre une entrée possible : monter, descendre, à droite, à gauche. Une évolution viendra avec le positionnement par rapport au mouvement que l'on aura dans la construction de figures géométriques.

1. ▶ ▶ ▲ ▶ ▶ ▼ ▼
2. ▼ ▼ ▼ ▶ ▶ ▲ ▲ ▶
3. ▶ ▶ ▶ ▼ ▼ ▼ ▼ ◀ ◀ ◀ ▲ ▲ ▶

3 Une sortie au cinéma Niveau 3

Diverses situations de la vie quotidienne peuvent être décrites par le langage algorithmique. Cet ancrage réel facilite la compréhension des concepts associés.
Voici un exemple d'algorithme qui permet d'aller de sa maison au cinéma.

Mettre son manteau et ses chaussures
Sortir de la maison
Aller prendre le bus
Prendre le bus
S'arrêter à la station 'cinéma'
Descendre du bus
Aller jusqu'au cinéma

4 Jouons à chat caché ! Niveau 1

On repense ici les figures géométriques en imaginant que l'on se déplace sur les côtés. Pour certains déplacements, il peut être utile pour des élèves de se déplacer réellement sur une figure tracée au sol.
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

1. **Première possibilité**

```
quand [drapeau] pressé
stylo en position d'écriture
avancer de 100
tourner ↻ de 90 degrés
avancer de 80
tourner ↻ de 90 degrés
avancer de 100
tourner ↻ de 90 degrés
avancer de 80
tourner ↻ de 90 degrés
relever le stylo
```

Deuxième possibilité

```
quand [drapeau] pressé
stylo en position d'écriture
répéter 2 fois
    avancer de 100
    tourner ↻ de 90 degrés
    avancer de 80
    tourner ↻ de 90 degrés
relever le stylo
```

Ce programme décrit le trajet que l'on fait en parcourant le rectangle à partir d'un sommet et en suivant les côtés. Dans la première possibilité, on peut observer que ces éléments sont répétés à deux reprises :

```
avancer de 100
tourner ↻ de 90 degrés
avancer de 80
tourner ↻ de 90 degrés
```

On peut donc les insérer dans une boucle.

```
répéter 2 fois
```

Ce programme, qui peut être complété, permet de remettre à zéro dès qu'on appuie sur la barre d'espace :

```
quand espace est pressé
relever le stylo
effacer tout
aller à x: 0 y: 0
```

2. On peut améliorer le programme en faisant dire au chat : « Je vais tracer un rectangle… » avant qu'il ne commence en ajoutant au début l'instruction :

```
dire Je vais tracer un rectangle de 100 sur 80. pendant 3 secondes
```

3. On peut améliorer le programme en masquant le chat une fois que le rectangle est tracé, il faut rajouter l'instruction `cacher` à la toute fin du programme et donc bien penser à ajouter l'instruction `montrer` au tout début du programme.

4. On peut améliorer le programme en traçant chaque côté du rectangle d'une couleur différente, pour cela on peut insérer avant chaque instruction « avancer » l'instruction `choisir la couleur [ ] pour le stylo` en choisissant une couleur différente.

5 Traits et croix Niveau 2

Cet exercice va permettre de réinvestir ce qui a été vu précédemment en y intégrant des déplacements où le stylo doit être relevé et où la gestion des angles d'orientation se complique un peu.
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

1. Pour programmer un algorithme permettant de dessiner un symbole d'égalité, on peut écrire le programme suivant :

```
quand [drapeau] pressé
montrer
aller à x: 0 y: 0
choisir la taille 5 pour le stylo
stylo en position d'écriture
avancer de 100
relever le stylo
aller à x: 0 y: -50
stylo en position d'écriture
avancer de 100
relever le stylo
cacher
```

2. Pour programmer un algorithme permettant de dessiner un signe de multiplication, on peut écrire les programmes suivants :

Première possibilité

```
quand [drapeau] pressé
montrer
s'orienter à 90
aller à x: 0 y: 0
choisir la taille 5 pour le stylo
stylo en position d'écriture
aller à x: 100 y: -100
relever le stylo
aller à x: 0 y: -100
stylo en position d'écriture
aller à x: 100 y: 0
relever le stylo
cacher
```

Deuxième possibilité

```
quand [drapeau] cliqué
montrer
choisir la taille 5 pour le stylo
aller à x: -50 y: -50
s'orienter à 45
stylo en position d'écriture
avancer de 142
relever le stylo
aller à x: -50 y: 50
s'orienter à 135
stylo en position d'écriture
avancer de 142
relever le stylo
cacher
```

3. Il faut, pour changer la couleur d'un élément, insérer l'instruction suivante avant de le tracer et choisir la couleur en cliquant sur cette couleur : `choisir la couleur [ ] pour le stylo`

Séquence 2 – Utilisation des variables

La notion de variable en algorithmique et en programmation est proche mais aussi différente de la notion de variable en mathématiques. Il faut donc la faire découvrir et montrer comment elle est utilisée pour stocker des informations.

6 Impair et passe Niveau 1

Ce jeu permettra de découvrir la notion de variable : un nouveau score remplace le score précédent, de la même façon le nombre de tours évolue en remplaçant le nombre de tours précédent.

1. Trois variables ont été utilisées dans cette partie : « TOURS », « JOUEUR1 » et « JOUEUR2 » qui contiennent le nombre de points de chacun.

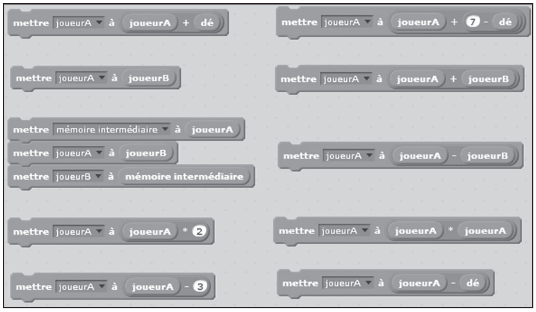
2. a. Ton score prend la valeur de ton score multiplié par 2

b. Le dé a donné une valeur impaire pour que ce soit le joueur B qui joue.

3. a. Ton score prend la valeur de ton score plus le score de ton adversaire

b. Le dé a donné une valeur paire pour que ce soit le joueur A qui joue.

4.



7 Le compte à rebours Niveau 1

Les programmes permettant de compter ou de décompter sont présents dans de nombreux algorithmes. On les retrouvera en particulier dans les situations de calculs de score. C'est une bonne entrée pour comprendre le concept de variable en programmation.

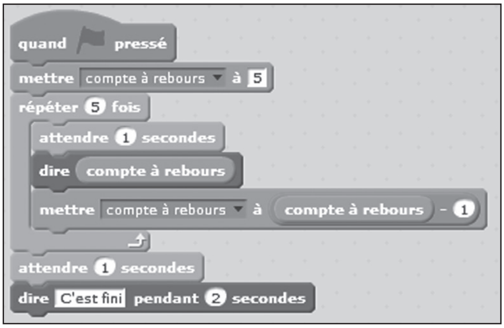
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

1.

ou

2.

3.



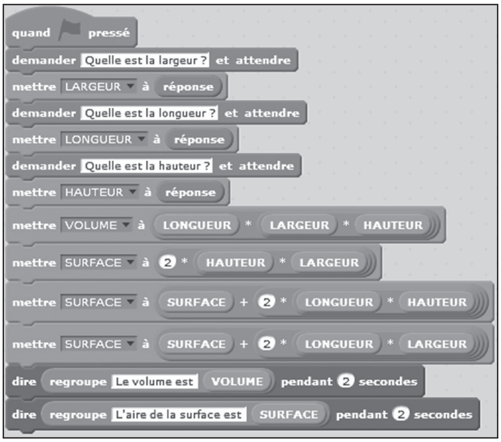
8 Calculs sur le pavé droit Niveau 2

Dans cet exercice, les élèves seront confrontés au cas où des valeurs sont données par l'utilisateur et donc stockées dans des variables pour être utilisées ensuite dans des calculs.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

Le programme ci-dessous se construit linéairement, question après question.

Les sept premières instructions répondent aux questions **1** et **2**, la huitième instruction répond à la question **3**. Pour la question **4**, la surface a été calculée en trois étapes pour faciliter la compréhension du calcul mais celui-ci pourrait aussi être effectué en une seule. Enfin, pour la question **5**, ce sont les deux dernières instructions qui répondent à la demande.



Séquence 3 – Utilisation des boucles

Un des grands principes de la programmation est l'utilisation de boucles. En effet, de nombreux algorithmes nécessitent de répéter des actions un certain nombre de fois ou jusqu'à ce qu'une condition soit réalisée.

Les élèves vont donc d'abord rencontrer ces boucles dans des environnements connus du quotidien, puis les utiliser pour décrire des situations et enfin les utiliser pour programmer afin de rendre leurs algorithmes simples et efficaces.

En géométrie, la boucle mettra en évidence des propriétés de figures.

9 Comme sur des roulettes Niveau 1

Ce premier exercice simple permettra de montrer comment une boucle peut simplifier une suite d'instructions.

1. Répéter 4 fois ▶ ▼.

2. Répéter 2 fois ▶ ▶ ▼.

3. Répéter 3 fois ▶. Répéter 3 fois ▼. Répéter 3 fois ◀.

10 Un décompte, ça compte ! Niveau 2

Dans cet exercice, on peut mettre en place des algorithmes utilisant les deux principaux types de boucles utilisés en programmation.

1.

Variables : **nombre** ; **nombre pair**
Mettre **nombre** à 141000
Mettre **nombre pair** à 2
Répéter jusqu'à **nombre pair** > 100
    Mettre **nombre** à **nombre** – **nombre pair**
    Mettre **nombre pair** à **nombre pair** +2
Afficher **nombre**

2.

Variables : **nombre** ; **nombre pair**
Mettre nombre à 141000
Mettre **nombre pair** à 2
Répéter jusqu'à **nombre** ⩽ 0
    Mettre **nombre** à **nombre** – **nombre pair**
    Mettre **nombre pair** à **nombre pair** +2
Afficher **nombre**

11 Le 4 × 100 m

Différentes épreuves sportives peuvent être modélisées à l'aide d'un algorithme faisant intervenir une boucle : le 110 m haies, le 3 000 m steeple...

On peut représenter le 4 × 100 m par l'algorithme suivant :
Répéter 3 fois
    Courir 100 m
    Donner le témoin
Courir 100 m
Franchir la ligne d'arrivée

12 Réduction sur les boucles ! Niveau 1

Cet exercice montre comment les boucles interviennent naturellement dans les constructions géométriques et il permet, par la même occasion, de consolider chez les élèves la connaissance des figures géométriques.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

1. a.

b.

c. Par exemple :

2.

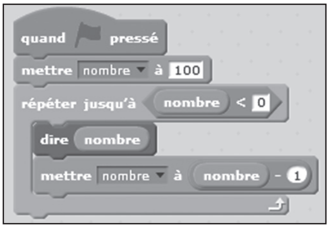
Le produit 10 × 36 donne bien 360°.

13 Un calcul vigésimal Niveau 2

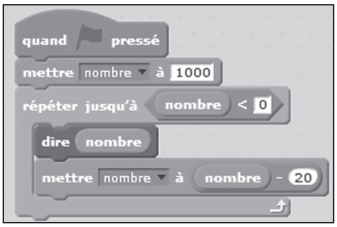
Cet exercice permet de travailler le second type de boucles (Répéter … Jusqu'à….) sur la création de différents comptes à rebours.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

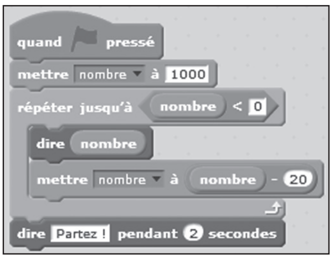
1.



2.



3.



Séquence 4 – Utilisation des instructions conditionnelles

Dans cette séquence, il s'agit de mettre en œuvre la logique associée à un test de type « Si…Alors… » ou du type « Si…Alors…Sinon ». Il faut donc trouver un argument qui permettra d'écrire le test : on développe alors plus particulièrement les compétences chercher et raisonner. La mise en œuvre renvoie davantage sur modéliser et communiquer.

14 À condition d'y arriver ! Niveau 1

Dans cet exercice, l'utilisation d'instructions conditionnelles permettra de raccourcir et de rationaliser les suites d'instructions à donner.

1. Répéter jusqu'à « skatepark atteint »
Si case libre devant **alors** avancer
sinon tourner à droite

2. Répéter jusqu'à « skatepark atteint »
Si case libre devant
alors avancer
sinon si une case libre à droite **alors** tourner à droite
sinon tourner à gauche.

15 Pas si mal ce décimal ! Niveau 2

Dans cet exercice, on traduit un processus mathématique à l'aide d'instructions conditionnelles pour en préparer leurs usages en programmation.

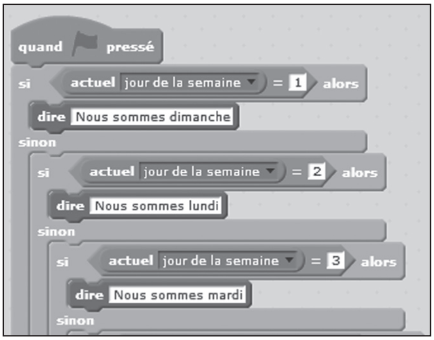
Si ce nombre se termine par 0
alors on le divise par 10
sinon on le multiplie par 5 et on ajoute 5.

16 Le calendrier Niveau 1

Cet exercice est une première utilisation simple et répétitive d'instructions conditionnelles simples pour en comprendre l'action dans le logiciel Scratch.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

Le programme nécessite alors de mettre à la suite des tests de la forme « Si…Alors… »

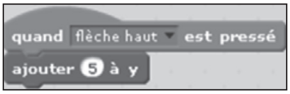


17 Déplacements au clavier Niveau 2

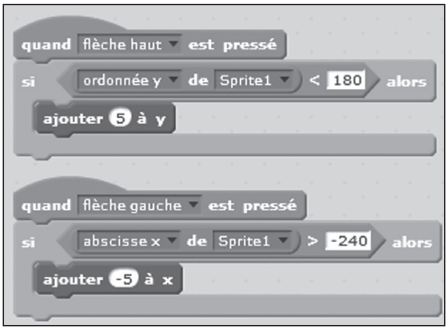
On montre ici comment les instructions conditionnelles permettront d'aider à animer les lutins dans l'optique des jeux et projets que les élèves construiront par la suite.

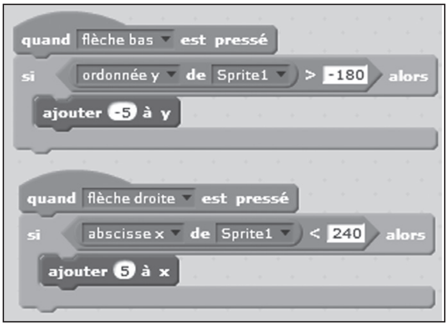
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

1. On peut avoir des programmes comme celui-ci :



2. Ce programme s'améliorera en vérifiant avant si le lutin peut encore avancer.

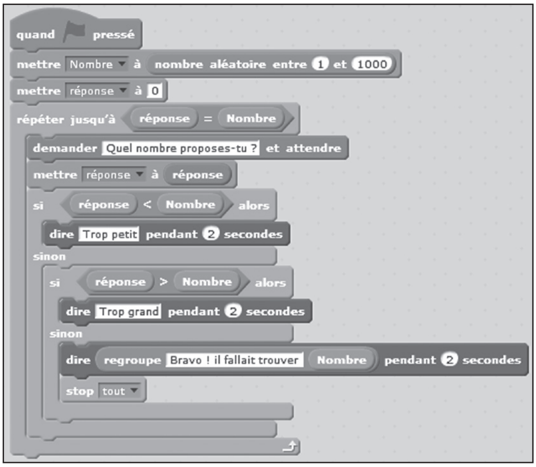




18 Cachez ce nombre ! Niveau 3

Dans cet exercice, les élèves vont créer un jeu classique, simple et amusant qui va les amener à utiliser toutes les instructions conditionnelles étudiées.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



Pour traiter une condition où trois issues sont possibles, on utilise deux instructions « Si…Alors…Sinon…. » imbriquées l'une dans l'autre.

Si → Alors **choix 1**
Si → Sinon SI → Alors **choix 2**
Si → Sinon SI → Sinon **choix 3**

Séquence 5 – Utilisation d'un bloc d'instructions

Les blocs d'instructions permettent de créer des sous-programmes que l'on pourra utiliser à plusieurs reprises dans le programme principal. Cela facilite alors la lecture et donc la compréhension du script.

19 Travaux ménagers Niveau 1

Cet exercice montre bien qu'un intérêt de l'utilisation des blocs d'instructions est de séparer des sous-programmes ayant des fonctions bien différentes.

Mettre la table pour une personne

Poser une assiette sur la table

Mettre un verre

Mettre les couverts

Préparer un pichet d'eau

Préparer une lessive

Mettre le linge dans le tambour

Choisir le programme de lavage

Mettre la lessive

Mettre un adoucisseur si besoin

20 Le repas du lapin Niveau 2

Dans cet exercice, comme dans les précédentes séquences, il s'agit d'utiliser des blocs d'instructions afin de raccourcir les séquences utilisées.

1. GI1 : ▶ ▲.

2. GI2 : ▶ ▲ ▲.

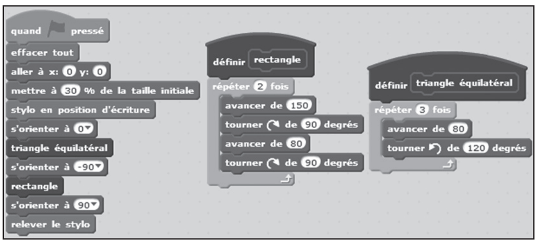
3. GI3 : ▶ ▶ ▼ ▼.

21 Géométries d'une enveloppe Niveau 1

Cet exercice montre comment l'utilisation de blocs, en particulier pour des constructions géométriques, permet de mieux comprendre les programmes réalisés et en facilite la construction.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

Les blocs sont visibles dans le premier programme :

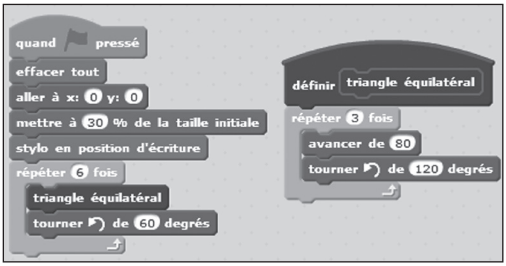


Le premier programme fait appel successivement à chacun des blocs. En ajoutant ces éléments, au premier programme, on obtient la deuxième figure avec les deux triangles équilatéraux :

22 Quel cirque ! Maximus ! Niveau 2

L'utilisation d'un bloc permet ici de construire une figure complexe à partir d'un motif unique.

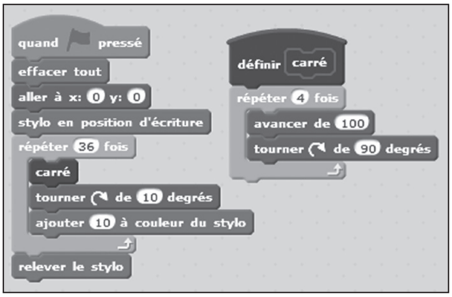
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



23 Silence ! On tourne ! Niveau 3

Dans cet exercice, un motif défini dans un bloc permet de construire très simplement une figure assez esthétique, ce qui ouvrira des perspectives pour la suite…

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



Les trois instructions qui sont dans la boucle permettent de tracer le carré, pivoter de 10° et de changer de couleur, ce qui donne la figure attendue.

Projet 1 – Jeu de Nim

Ce jeu classique est présent dans les programmes officiels. Dans cet algorithme, une bonne analyse de la demande permet d'améliorer grandement l'efficacité en réalisant le script pour un objet (le crayon), puis en le copiant. Il ne reste alors qu'à effectuer quelques adaptations.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

Projet 2 – Conjuguer un verbe du premier groupe

Comme il est dit dans le programme, les activités reliant les mathématiques et le français avec Scratch sont nombreuses : pluriel de mots (sans ou avec cas particuliers), féminin d'adjectifs (sans ou avec cas particuliers), jeu du cadavre exquis, conjugaisons, etc. Les différents cas particuliers permettent la mise en œuvre d'une différenciation en classe.
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

Projet 3 – Promenade aléatoire

La notion d'aléatoire arrive dans le programme du cycle et il y a dans ce projet une approche à la fois esthétique et ludique : avec la même programmation, chacun obtiendra une figure différente. Le visuel garantit l'adhésion de tous !
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

Projet 4 – Le perroquet volant

On a ici la mise en œuvre d'un style de jeu classique sur les supports numériques actuels. Les perspectives d'évolutions vont bien au-delà des six étapes proposées, et l'on peut gager que les élèves s'en saisiront en autonomie ! Derrière le côté très ludique se cache une véritable gestion de la programmation pour obtenir un résultat satisfaisant. Cela donne une motivation indiscutable !
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

Projet 5 – Un jeu sérieux

Ce programme met en œuvre plusieurs notions d'algorithmique étudiées tout en intégrant une utilisation du travail effectué en mathématiques sur les nombres relatifs.
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

chapitre 1

Opérations sur les nombres relatifs

I. Le programme

Thème A – Nombres et calculs

Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maitrise des procédures de calcul. Les différentes composantes de ce thème sont reliées entre elles. Les élèves manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils prennent conscience du fait qu'un même nombre peut avoir plusieurs écritures (notamment écritures fractionnaire et décimale). Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour résoudre des problèmes faisant intervenir des équations ou inéquations du premier degré. À l'occasion d'activités de recherche, ils peuvent rencontrer la notion de nombres irrationnels, par exemple lors d'un travail sur les racines carrées.

Attendus de fin de cycle

- Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes
- Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers
- Utiliser le calcul littéral

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes	
■ Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ; passer d'une représentation à une autre. – Nombres décimaux. – Nombres rationnels (positifs ou négatifs), notion d'opposé. – Fractions, fractions irréductibles, cas particulier des fractions décimales. – Définition de la racine carrée ; les carrés parfaits entre 1 et 144. – Les préfixes de nano à giga.	■ Rencontrer diverses écritures dans des situations variées (par exemple nombres décimaux dans des situations de vie quotidienne, notation scientifique en physique, nombres relatifs pour mesurer des températures ou des altitudes). ■ Associer à des objets des ordres de grandeurs (par exemple, la taille d'un atome, d'une bactérie, d'une alvéole pulmonaire, la longueur de l'intestin, la capacité de stockage d'un disque dur, la vitesse du son et de la lumière, la population française et mondiale, la distance de la Terre à la Lune et au Soleil, la distance du Soleil à l'étoile la plus proche). ■ Prendre conscience que certains nombres ne sont pas rationnels.
■ Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels. ■ Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée. – Ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire. – Égalité de fractions.	■ Montrer qu'il est toujours possible d'intercaler des rationnels entre deux rationnels donnés, contrairement au cas des entiers.
■ **Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté***.	■ Pratiquer régulièrement le calcul mental ou à la main, et utiliser à bon escient la calculatrice ou un logiciel.

■ **Calculer avec des nombres relatifs, des fractions ou des nombres décimaux (somme, différence, produit, quotient).** ■ **Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.** ■ Effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique. – Définition des puissances d'un nombre (exposants entiers, positifs ou négatifs).	■ Effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes (par exemple, comparer des consommations d'eau ou d'électricité, calculer un indice de masse corporelle pour évaluer un risque éventuel sur la santé, déterminer le nombre d'images pouvant être stockées sur une clé USB, calculer et comparer des taux de croissance démographique).

* *En* ***gras*** *: ce qui est traité dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

Après avoir découvert et étudié les nombres relatifs en classe de cinquième, les élèves ont également appris à les additionner et à les soustraire. La classe de quatrième leur permet de compléter leurs connaissances sur ces nombres en apprenant à les multiplier et à les diviser entre eux. L'une des principales difficultés rencontrées par les élèves est la conception même qu'ils ont des nombres relatifs et qu'il faut faire évoluer. En effet, ceux-ci ont été souvent introduits pour traduire une hausse ou une baisse, un gain ou une perte, etc. Alors qu'en classe de cinquième il était relativement aisé de donner du sens à la somme de deux relatifs en additionnant deux pertes ou bien un gain et une perte, il sera en revanche impossible de donner du sens au produit de deux pertes par exemple. C'est un problème qui a été historiquement rencontré, et il faut donc aider les élèves à effectuer cette prise de recul qui leur permet de considérer les nombres relatifs comme des nombres avant tout. Ceci facilitera l'étude des opérations sur ces nombres.
Nous pourrons travailler par la suite dans ce chapitre sur des programmes ou des séquences de calcul comportant ou non des parenthèses et donc compléter les connaissances des élèves sur les priorités opératoires. Un effort important devra être fait sur la signification des signes « + » et « – », qui peuvent être considérés comme des signes opératoires ou prédicatoires (signes des nombres) suivant les cas ou l'envie. Ce travail de passage de l'un à l'autre est capital pour préparer l'étude future du calcul littéral.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Appliquer la règle des signes ■ Vidéo « *Je comprends* » : Effectuer des calculs sur les nombres relatifs
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Tableur ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU reçoivent un mail du Crédit Matheux

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Multiplier des nombres relatifs

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité propose de considérer la calculatrice comme une boite noire qui sait comment faire pour multiplier deux nombres relatifs. Les huit exemples proposés ne sont qu'un support et l'on pourra proposer aux élèves de choisir leurs propres exemples afin d'explorer et d'affiner leurs conjectures. Un bilan avec la classe peut être fait à l'issue de la question 1 afin que tout le monde accepte des conjectures au nom de la classe et surtout que les élèves puissent eux-mêmes invalider des conjectures erronées à l'aide de contre-exemples.
Par la suite, dans les questions 3 et 4, on propose aux élèves d'aller vers un début de preuve à l'aide d'exemples génériques.

• Correction

1. a. $(+32)$ **b.** (-15) **c.** (-63) **d.** $(+14)$
e. (-16) **f.** $(-30{,}1)$ **g.** $(+10)$ **h.** $(+9)$
2. À vérifier avec l'élève et à mettre en commun avec la classe.
3. a. (-6). **b.** On additionne 3 fois le terme (-2).
c. $(-2)+(-2)+(-2)=(-6)$.
4. a. $(+24)$.
b. $(-8)\times((-3)+(+3))=0$. En développant, on obtient bien $(-8)\times(-3)+(-8)\times(+3)=0$.
c. Leur somme vaut 0, ils sont donc opposés.
Comme $(-8)\times(-3)=(+24)$ alors $(-8)\times(+3)=(-24)$.
5. Les exemples utilisés peuvent être considérés comme des exemples génériques et on pourrait donc généraliser en travaillant dans le cas général avec des lettres.

Activité 2. Diviser des nombres relatifs

• Considérations didactiques et mise en pratique

Dans cette activité, on se propose de déterminer comment on calcule le quotient de deux nombres relatifs à partir des connaissances d'une part sur le produit de deux nombres relatifs et d'autre part sur le lien entre produit et quotient. Une fois cette « méthode » acquise, le professeur pourra proposer un raccourci en institutionnalisant les propriétés permettant de calculer le quotient de deux nombres relatifs.

• Correction

1. a. $(+5)\times\mathbf{(+5)}=(+25)$ donc $\dfrac{(+25)}{(+5)}=\mathbf{(+5)}$.
b. $(+4)\times\mathbf{(-7)}=(-28)$ donc $\dfrac{(-28)}{(+4)}=\mathbf{(-7)}$.
c. $(-8)\times\mathbf{(-4)}=(+32)$ donc $\dfrac{(+32)}{(-8)}=\mathbf{(-4)}$.
d. $(-2)\times\mathbf{(+7)}=(-14)$ donc $\dfrac{(-14)}{(-2)}=\mathbf{(+7)}$.
2. a. $(+5)$ **b.** (-10) **c.** (-5) **d.** $(+7)$
3. Les règles de signe sont les mêmes que pour le produit. En revanche, on divise les distances à zéro.

Activité 3. Arrondir un quotient

• Considérations didactiques et mise en pratique

Dans cette activité, on se propose de réactiver, de façon non formelle, les connaissances des élèves sur les arrondis et troncatures. C'est l'occasion pour le professeur de remettre en place ces notions sans pour autant entrer dans un formalisme contre-productif.

• Correction

1. a. Arrondi : 1,5. Troncature : 1,5.
b. Arrondi : 1,53. Troncature : 1,52.
c. Arrondi : 1,529. Troncature : 1,529.
2. Cela dépend du chiffre situé juste après le rang donné.
3. La calculatrice affiche : – 1,846153846.
4. a. Arrondi : – 1,8. Troncature : – 1,8.
b. Arrondi : – 1,85. Troncature : – 1,84.
c. Arrondi : – 1,846. Troncature : – 1,846.

Activité 4. Effectuer une séquence de calculs

• Considérations didactiques et mise en pratique

Une fois les règles de calcul instituées, cette activité aide à remettre en place les règles de priorités des calculs et à étendre leur champ d'application aux nombres relatifs. C'est aussi l'occasion d'intégrer dans ces règles les « carrés » et « cubes » dont la priorité n'a jamais été clairement définie jusqu'alors.
Au cours de cette activité, les élèves sont amenés à effectuer des calculs à la main ou à la calculatrice, ce qui permet également de traiter les problèmes de parenthèses et de puissances dans l'expression à entrer sur une calculatrice.

• Correction

A. 1. a. (-20) **b.** $(+14)$ **c.** (-3) **d.** -23 **e.** 21 **f.** -4
2. a. Kieran : $7+3=10$ et $10^2=100$ et Alexia : $3^2=9$ et $7+9=16$.
b. $3^2=3\times3$
c. C'est Alexia qui a raison.
3. a. -4 **b.** 53 **c.** -28
B. 4. a. 2 138 **b.** 78 **c.** – 12 649
5. a. $(-47)^2$ est positif et -47^2 est négatif.
b. $(-47)^2=2\,209$ et $-47^2=-2\,209$.
6. $(-82)^2=6\,724$ et $(-15)3=-3\,375$.

■ Objectif 1. Calculer avec des nombres relatifs

Je m'entraine

1 **a.** $-16{,}2$ **b.** -7 **c.** -9 **d.** -36 **e.** 5, 6, 7, 8 ou 9

2 **a.** $(+15)$ **b.** (-4) **c.** $(+12)$ **d.** (-15)

3 **a.** $(+8)$ **b.** $(+30)$ **c.** (-14) **d.** (-4)

4 **a.** $(+21)$ **b.** (-20) **c.** (-48) **d.** $(+18)$

5 **a.** $(+21)$ **b.** $(+16)$ **c.** (-5) **d.** (-36) **e.** $(+56)$ **f.** (-12)

6 **a.** $(+54)$ **b.** $(+21)$ **c.** (-24) **d.** (-55) **e.** $(+28)$ **f.** $(+45)$

7 **a.** $(+12)$ **b.** (-24) **c.** $(+100)$ **d.** $(+128)$

8 **a.** 7 **b.** -5 **c.** -6 **d.** 8

9 **a.** Troncature : 4,4. Arrondi : 4,4.
b. Troncature : $-2,4$. Arrondi : $-2,4$.
c. Troncature : 2,6. Arrondi : 2,7.
d. Troncature : 1,6. Arrondi : 1,7.

Je résous des problèmes simples

10 **a.** (-832) **b.** $(+832)$ **c.** $(+832)$ **d.** $(-83,2)$
e. $(+83,2)$ **f.** $(-8,32)$

11 $1,4\times(-7)=-9,8$. $13,5-23,3=-9,8$.
$-1,7\times(-4)=6,8$. $3,5+3,3=6,8$.
$-2\times(-1,8)=3,6$. $-5,7+9,3=3,6$.
$-2,9-4,9=-7,8$. $1,3\times(-6)=-7,8$.

12

×	−2	+5	−7	+1,7
+3	−6	+15	−21	+5,1
−10	+20	−50	+70	−17
+9	−18	+45	−63	+15,3
−0,5	+1	−2,5	+3,5	−0,85

13 **a.** $-6+(-12)=-18$ et $-18-(+5)=-23$.
b. $13+(-19)=-6$ et $-6-(-17)=11$.

14 **a.** $-9\times(-4)=36$ et $36\times(+5)=180$.
b. $(-6)\times(-8)=48$ et $48\times(-0,5)=-24$.

15 **a.** $80+(-5)=(-16)$ et $(-16)+(+4)=(-4)$.
b. $(-72)+(+3)=-24$ et $-24+(-4)=6$.

16 **1. a.** $(-18)=(-2)\times 9$. **b.** $(-18)=(-10)+(-8)$.
c. $(-18)=(-6)-(+12)$.
2. $14=(-2)\times(-7)$. $14=(+10)+(+4)$.
$14=(-6)-(-20)$. $(-21)=(-3)\times(+7)$.
$(-21)=(+10)+(-31)$. $(-21)=(-6)-(+15)$.
$0=0\times(-7)$. $0=(+10)+(-10)$.
$0=(-6)-(-6)$.

17 **a.** 210 **b.** -210 **c.** -210 **d.** $-0,21$

18 **a.** 10,625 **b.** $-10,625$ **c.** 10,625 **d.** $-1,0625$
e. 10,625 **f.** -10625

19 **1.** $23+3$.
2. a. 7,7 cm.
b. C'est l'arrondi au dixième, car un millimètre correspond à un dixième de centimètre.

20 **1. a.** $(-12)+(+2)$ **b.** $(-2)\times(+3)$
c. $(-1)+(-5)$ **d.** $(+8)-(+14)$
2. $8=(-24)+(-3)$ $8=(-2)\times(-4)$
$8=(-1)+(+9)$ $8=(+5)-(-3)$
$(-14)=(-28)+(+2)$ $(-14)=(-2)\times(+7)$
$(-14)=(-5)+(-9)$ $(-14)=(-9)-(+5)$

■ Objectif 2. Effectuer des calculs, à la main ou à la calculatrice

Je m'entraine

21 **a.** 96 **b.** 42 **c.** -12 **d.** 4

22 **a.** -5 **b.** -17 **c.** 25 **d.** 2

23 **a.** 3 **b.** 4 **c.** 12 **d.** -37

24 **a.** -27 **b.** -40 **c.** $-0,4$ **d.** -6

25 **a.** -22 **b.** -14 **c.** 4 **d.** -12

26 **a.** 14,7 **b.** $-2,8$ **c.** $-10,3$ **d.** -2

27 **a.** 22 **b.** 32 **c.** -93 **d.** -201 **e.** -4 **f.** -10

28 **a.** 6 **b.** 3 **c.** 51,75 **d.** -1

29 **a.** 17,5 **b.** 7,4 **c.** 2,6 **d.** 50,3

30 **a.** 64 **b.** 25 **c.** 64 **d.** -8

31 **a.** 16 **b.** 11 **c.** 50 **d.** -98

32 **a.** -90 **b.** -36 **c.** 27 **d.** $-5,4$

Je résous des problèmes simples

33 **1.** Arthur a fait une erreur à la troisième ligne où il effectue une soustraction avant d'avoir effectué la multiplication. Clara a fait une erreur à la dernière ligne. Elle dit que $30-8=-22$ alors que $30-8=22$.
2. Il suffit de rectifier l'erreur de Clara à la fin : $30-8=22$.

34 **a.** (-11) **b.** 19 **c.** 45 **d.** (-7)
C'est Medhi qui a raison.

35 **1. a.** (-15) **b.** (-22) **c.** $(-0,4)$ **d.** (-11)
2. $(-0,4)>(-11)>(-15)>(-22)$.

36 Louisa avait choisi 7.

37 9,5

38 **1.** $A=-32,275$ $D=0,25$ $E=171,6$ $I=-76$
$M=-3\,497$ $R=-325,1$ $Y=-818$
2. *MYRIADE*

39 -8 et 8, car en multipliant par -1, on obtient à chaque fois l'opposé.

40 Il lui reste 12 pièces.

41 $(-3)^2\times(-4)=-36$ et $3\times(-17)+3\times 5=-36$. C'est donc Swann qui a raison.

Je travaille seul(e)

42 A **43** B **44** A **45** C **46** A

47 **1.** $A = -12$; $B = -35$; $C = 10$; $D = 42$; $E = -14$ et $F = -30$.
2. $A \times B = 420$, $C \times D = 420$ et $E \times F = 420$.
Les trois produits sont égaux, car il s'agit des mêmes distances à zéro qui sont multipliées à chaque fois et il y a toujours 2 nombres négatifs, donc le résultat est positif.

48 **a.** 0,7 **b.** $-4,8$ **c.** 27,5 **d.** -7 **e.** $-0,7$ **f.** 2,4

49 **a.** $-18,6$ **b.** $-7,6$ **c.** 17 **d.** $-2,4$ **e.** $-2,8$ **f.** $-29,2$

50 **a.** -8 **b.** 0,75 **c.** $-0,7$

51 **a.** $-22,4$ **b.** 15,9 **c.** $-18,5$ **d.** $-32,8$ **e.** 16,2 **f.** $-51,1$

52 **a.** -224 **b.** -64 **c.** -900 **d.** $-3\,500\,000$

53 **a.** 6 **b.** -4 **c.** 600 **d.** $-0,7$ **e.** $-0,12$ **f.** 0

54 $A = 96$ et $B = 90$, donc $A > B$.

55 **a.** $(-12) = (-7) + (-5)$ **b.** $(-12) = (-2) \times (+6)$
c. $18 = (-2) + (-6) + (+26)$ **d.** $18 = (+2) \times (-3) \times (-3)$
e. $(-60) = (+15) + (-100) + (+20) + (+5)$
f. $(-60) = (+2) \times (+2) \times (-3) \times (+5)$

56 Troncature à l'unité : 1.
Troncature au dixième : 1,4.
Troncature au centième : 1,42.
Troncature au millième : 1,429.

57 Troncature à l'unité : 2.
Troncature au dixième : 2,5.
Troncature au centième : 2,51.
Troncature au millième : 2,518.

58 Troncature à l'unité : 2.
Troncature au dixième : 2,2.
Troncature au centième : 2,21.
Troncature au millième : 2,215.

59 Arrondi à l'unité : 2.
Arrondi au dixième : 2,2.
Arrondi au centième : 2,25.
Arrondi au millième : 2,248.

60 Arrondi à l'unité : 2.
Arrondi au dixième : 1,6.
Arrondi au centième : 1,59.
Arrondi au millième : 1,595.

61 Arrondi à l'unité : 2.
Arrondi au dixième : 1,7.
Arrondi au centième : 1,71.
Arrondi au millième : 1,706.

62 Pour $\frac{147}{19}$:
a. 7 est la troncature à l'unité.
b. 8 est l'arrondi à l'unité.
c. 7,73 est la troncature au centième.
d. 7,8 n'est ni une troncature ni un arrondi.
e. 7,7 est la troncature et l'arrondi au dixième.
f. 7,7368 est la troncature et l'arrondi au dix-millième.
g. 7,737 est l'arrondi au millième.
h. 7,74 est l'arrondi au centième.

63 **a.** 36 **b.** 47

64 **a.** -43 **b.** 21,5 **c.** -1 **d.** 24

65 **a.** 27 **b.** 13 **c.** -3 **d.** 16

66 **a.** 31 **b.** $-38,9$ **c.** -23 **d.** 181

67 **1. a.** 0,692 **b.** $-9,27$ **c.** 97 **d.** $-3,57575$
2. $97 - (-9,27) = 106,27$
3. $-9,27 < -3,57575 < 0,692 < 97$

68 **1.** $(-3)^2 \times (-2)^3$ est négatif car $(-3)^2$ est positif et $(-2)^3$ est négatif.
$(-3)^2 + (-2)^3$ est positif car $(-3)^2 = 9$ et $(-2)^3 = -8$.

69 **1.** 19

Je résous des problèmes

70 **1.** Le montant total des achats est de 9,85 €.
2. a. Sami va payer 9 € au lieu de 9,85 €.
b. Sami a économisé 0,85 €.
c. Sami a payé la troncature à l'unité du total.
3. Au maximum, le commerçant perdra $50 \times 0,99 = 49,50$ €.

71

A	B	$A+B$	$A-B$	$A \times B$	$\frac{A}{B}$
3	4	7	-1	12	0,75
-7	5	-2	-12	-35	$-1,4$
$-3,2$	10	6,8	$-13,2$	-32	$-0,32$
$-0,6$	-2	$-2,6$	1,4	1,2	0,3

72 **1.** -19 **2.** -7 **3.** $-0,8$

73 **a.** 3 **b.** 21 **c.** 5 **d.** -10

74 **a.** $-3 - 7 \times (-1) = 4$
b. $(-3 + 7) \times (-1) = -4$

75 **1. a.** 55,19 € **b.** 49,86 € **c.** 5,33 €
2. 37,30 L

76 a est positif. b est négatif. c est positif.

77 **1.** Pour 2, on trouve 3,25. Pour -7, on trouve 5,5. Pour 3,5, on trouve 2,875. Pour $-2{,}3$, on trouve 4,325.
2. Non ! Par exemple, si on choisit 7, on trouve 2 à la fin.

78 **1.** Pour 5, on trouve 20.
2. Expression **b.**
3. b. On obtient toujours 20. En développant l'expression, on peut prouver qu'elle est égale à 20.

79 **a.** Faux. $(+8)\times(-5)=(-40)$ alors que $(+8)+(-5)=(+3)$.
b. Vrai. **c.** Vrai.

80 (-1)

81 **1.** $-1\,008$ **2.** $1\,008$

82 **1. a.** Il y a 504 facteurs négatifs donc ce produit est positif. **b.** 0
2. a. Il y a 505 facteurs négatifs donc ce produit est négatif. **b.** 5
3. $A\times B$ est négatif et se termine par un 0.

83 Arrondi au millième du nombre d'or : 1,618.

84 Jeu à jouer.

Dans les autres matières

85 **1. a.** -4 °F **b.** 44,6 °F **c.** 59 °F **d.** 93,2 °F **e.** 98,6 °F **f.** 212 °F
2. a. -25 °C **b.** -15 °C **c.** -10 °C **d.** 5 °C **e.** 10 °C **f.** 37,8 °C
3. -40 °C $=-40$ °F

86 **a.** $20+\boxed{4}=6\times\boxed{4}$
b. $\boxed{-4}-12=4\times\boxed{-4}$
c. $\boxed{-2}\times 7=-16-\boxed{-2}$
d. $\boxed{-8}-24=4\times\boxed{-8}$

Jeux mathématiques

87

864
12 72
-2 -6 -12
$+1$ -2 $+3$ -4

96
-8 -12
-2 $+4$ -3
0,5 -4 -1 $+3$

88

−2,5	**−4**	0,8
−0,64	2	−6,25
5	**−1**	**−1,6**

89 Tous les facteurs sont égaux à -1 sauf un qui est égal à -2. Le produit de ces 2017 facteurs négatifs est donc égal à -2.

90 6,534

Devoirs à la maison

91 **1. a.** $100\times A=135{,}353535...$
b. $100\times A-A=134$
c. $A=\dfrac{134}{99}$
2. a. $A=\dfrac{27\,132}{999}=\dfrac{9\,044}{333}$
b. $B=\dfrac{1234}{9\,999}$
c. $C=\dfrac{3\,142\,854}{999\,999}=\dfrac{22}{7}$
3. $\dfrac{56\,260}{9\,999}$

92 $A=-1{,}75$ $B=-0{,}2$ $C=-33$
$D=44$ $E=-5{,}6$ $F=-16{,}7$
L'intrus est le D qui est le seul nombre positif.

93 **a.** Faux. Contre-exemple avec 5 et 3.
b. Faux. Contre-exemple avec -2.
c. Faux. Ce n'est vrai qu'avec 0, tous les autres nombres offrent des contre-exemples.
d. Vrai. $((-1)\times x)^3=(-1)^3\times x^3=(-1)\times x^3$.

Avec un logiciel

Activité 1. Une machine à tronquer et arrondir

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Cette activité permet de faire vivre les notions de troncature et d'arrondi tout en pointant leurs ressemblances et différences significatives. L'utilisation des fonctions « tronque » et « arrondi » permet en outre de refaire le lien entre le nom du rang et le nombre de chiffres après la virgule correspondant. La syntaxe des fonctions « tronque » et « arrondi » est la même. Il faut donner d'abord le nombre dont on veut la troncature ou l'arrondi, puis ensuite le nombre de chiffres voulus après la virgule (ce qui revient à donner le rang). Ainsi, pour obtenir la troncature du nombre contenu en A1 au centième, on saisit : « = tronque(A1;2) ».

• ***Correction***

1. à **2b.** À vérifier sur l'écran de l'élève.
2. c. Au millième.
3. a. $\dfrac{5}{7}$ **b.** $\dfrac{1}{7}$
4. a. $\dfrac{122}{99}$ **b.** $\dfrac{2263}{3\,333}$
5. a. Trois fractions $\dfrac{1}{23}$; $\dfrac{3}{23}$ et $\dfrac{7}{23}$
b. Trois fractions $\dfrac{22}{23}$; $\dfrac{20}{23}$ et $\dfrac{16}{23}$

c. On peut remarquer que pour chacune des fractions de la question **a**, son complémentaire à 1 se trouve dans la question **b**. Cela s'explique par la symétrie du phénomène d'arrondi.

Activité 2. Des carrés en cubes !

• Considérations didactiques et mise en pratique

Dans cette activité, il s'agit d'explorer un problème ouvert. Parfois, la différence des carrés de deux nombres consécutifs est égale au cube d'un nombre entier. En fait, la différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égale à $(n+1)^2-(n)^2=2n+1$ soit un nombre entier impair.

On peut donc toujours trouver deux nombres entiers consécutifs dont la différence des carrés est égale à un cube, à partir du moment où ce cube est un nombre impair. Cela est donc possible pour tous les cubes de nombre impair et impossible pour tous les cubes de nombre pair. Les élèves n'ayant pas cette théorie, ils peuvent procéder par tâtonnements, en particulier en comparant les deux listes obtenues.

Pour calculer la puissance d'un nombre dans un tableur, il existe une fonction « puissance » mais on peut simplement utiliser le symbole exposant « ^ » accessible par Alt Gr + 9 ou encore en utilisant le symbole accent circonflexe sur le clavier ou encore en revenant au sens de la puissance et en multipliant la cellule par elle-même autant de fois que nécessaire.

• Correction

1. $14^2-13^2=196-169=27$ et $3^3=27$.

2. a. à **2. e.** À vérifier sur l'écran de l'élève.

f. $63^2-62^2=5^3$. $172^2-171^2=7^3$. $365^2-364^2=9^3$.

3. a. $1\,099^2-1\,098^2=13^3$ **b.** $2\,457^2-2\,456^2=4\,913$

c. $...^2-...^2=28^3$ (Impossible, car 28 est pair et son cube aussi.)

d. $1688^2-1687^2=15^3$

e. $...^2-...^2=21952$ (Impossible, car 21 952 est pair.)

f. $4\,631^2-4\,630^2=9\,261$

Pour aller plus loin : Oui, par exemple $8^3-7^3=13^2$.

Activité 3. La conjecture de Syracuse

• Considérations didactiques et mise en pratique

L'objectif de cette activité est d'explorer la conjecture de Syracuse. Tout d'abord les élèves seront amenés à formuler la conjecture puis à éventuellement la tester sur d'autres nombres.

Pour la programmation sous Scratch, il faudra faire appel à des instructions conditionnelles et une boucle dans laquelle la condition d'arrêt pourrait être l'obtention du nombre 1 qui est synonyme de répétition infinie des nombres 4 ; 2 et 1.

• Correction

1. 20 est pair, on calcule donc $\frac{20}{2}=10$

10 est pair, on calcule donc $\frac{10}{2}=5$

5 est impair, on calcule donc $3\times5+1=16$

16 est pair, on calcule donc $\frac{16}{2}=8$

8 est pair, on calcule donc $\frac{8}{2}=4$

4 est pair, on calcule donc $\frac{4}{2}=2$

2 est pair, on calcule donc $\frac{2}{2}=1$

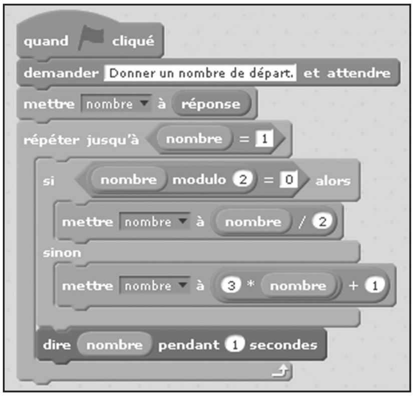
1 est impair, on calcule donc $3\times1+1=4$

4 est pair, on calcule donc $\frac{4}{2}=2$

2 est pair, on calcule donc $\frac{2}{2}=1$

2. b. On peut conjecturer que les nombres 4 ; 2 et 1 vont se répéter indéfiniment.

3. et **4.**



■ Tâches complexes

1. Le code-barres des produits

2018201420150 est correct.

1471471471474 est correct.

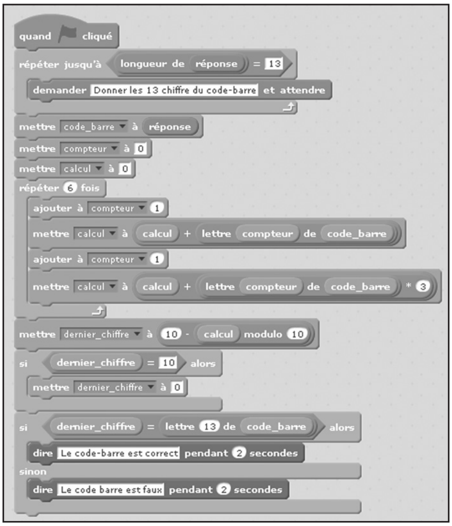
5641894565645 est correct.

9782047330265 est correct.

5156456456458 est incorrect. Le dernier chiffre devrait être un zéro.

0901200729053 est correct.

Algorithme permettant de vérifier :



2. Les problèmes DUDU

Il y a deux façons de voir le problème. Soit les frais se payent à la fin, soit ils sont déduits du capital au fur et à mesure. Dans le premier cas, l'opération est rentable si le mois a 28, 29 ou 30 jours, mais elle n'est plus rentable si le mois comporte 31 jours.

Dans le second cas, l'opération est rentable si le mois a 28 ou 29 jours, mais elle n'est plus rentable si le mois comporte 30 ou 31 jours.

JOUR	Capital	Frais	Total		DEPART	JOUR	Capital	Frais
1	500 000,00 €	0,01 €	499 999,99 €		500 000,00 €	1	499 999,99 €	0,01 €
2	550 000,00 €	0,02 €	549 999,98 €			2	549 999,97 €	0,02 €
3	605 000,00 €	0,04 €	604 999,96 €			3	604 999,93 €	0,04 €
4	665 500,00 €	0,08 €	665 499,92 €			4	665 499,84 €	0,08 €
5	732 050,00 €	0,16 €	732 049,84 €			5	732 049,66 €	0,16 €
6	805 255,00 €	0,32 €	805 254,68 €			6	805 254,31 €	0,32 €
7	885 780,50 €	0,64 €	885 779,86 €			7	885 779,10 €	0,64 €
8	974 358,55 €	1,28 €	974 357,27 €			8	974 355,73 €	1,28 €
9	1 071 794,41 €	2,56 €	1 071 791,85 €			9	1 071 788,74 €	2,56 €
10	1 178 973,85 €	5,12 €	1 178 968,73 €			10	1 178 962,50 €	5,12 €
11	1 296 871,23 €	10,24 €	1 296 860,99 €			11	1 296 848,51 €	10,24 €
12	1 426 558,35 €	20,48 €	1 426 537,87 €			12	1 426 512,88 €	20,48 €
13	1 569 214,19 €	40,96 €	1 569 173,23 €			13	1 569 123,20 €	40,96 €
14	1 726 135,61 €	81,92 €	1 726 053,69 €			14	1 725 953,60 €	81,92 €
15	1 898 749,17 €	163,84 €	1 898 585,33 €			15	1 898 385,13 €	163,84 €
16	2 088 624,08 €	327,68 €	2 088 296,40 €			16	2 087 895,96 €	327,68 €
17	2 297 486,49 €	655,36 €	2 296 831,13 €			17	2 296 030,19 €	655,36 €
18	2 527 235,14 €	1 310,72 €	2 525 924,42 €			18	2 524 322,49 €	1 310,72 €
19	2 779 958,66 €	2 621,44 €	2 777 337,22 €			19	2 774 133,30 €	2 621,44 €
20	3 057 954,52 €	5 242,88 €	3 052 711,64 €			20	3 046 303,75 €	5 242,88 €
21	3 363 749,97 €	10 485,76 €	3 353 264,21 €			21	3 340 448,37 €	10 485,76 €
22	3 700 124,97 €	20 971,52 €	3 679 153,45 €			22	3 653 521,68 €	20 971,52 €
23	4 070 137,47 €	41 943,04 €	4 028 194,43 €			23	3 976 930,81 €	41 943,04 €
24	4 477 151,22 €	83 886,08 €	4 393 265,14 €			24	4 290 737,81 €	83 886,08 €
25	4 924 866,34 €	167 772,16 €	4 757 094,18 €			25	4 552 039,44 €	167 772,16 €
26	5 417 352,97 €	335 544,32 €	5 081 808,65 €			26	4 671 699,06 €	335 544,32 €
27	5 959 088,27 €	671 088,64 €	5 287 999,63 €			27	4 467 780,33 €	671 088,64 €
28	6 554 997,10 €	1 342 177,28 €	5 212 819,82 €			28	3 572 381,08 €	1 342 177,28 €
29	7 210 496,81 €	2 684 354,56 €	4 526 142,25 €			29	1 245 264,63 €	2 684 354,56 €
30	7 931 546,49 €	5 368 709,12 €	2 562 837,37 €			30	- 3 998 918,03 €	5 368 709,12 €
31	8 724 701,13 €	10 737 418,24 €	- 2 012 717,11 €			31	- 15 136 228,07 €	10 737 418,24 €

chapitre 2

Nombres en écritures fractionnaires

I. Le programme

Thème A – Nombres et calculs

Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maitrise des procédures de calcul. Les différentes composantes de ce thème sont reliées entre elles. Les élèves manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils prennent conscience du fait qu'un même nombre peut avoir plusieurs écritures (notamment écritures fractionnaire et décimale). Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour résoudre des problèmes faisant intervenir des équations ou inéquations du premier degré. À l'occasion d'activités de recherche, ils peuvent rencontrer la notion de nombres irrationnels, par exemple lors d'un travail sur les racines carrées.

Attendus de fin de cycle

- Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes.
- Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées	
■ **Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ; passer d'une représentation à une autre.** – Nombres décimaux. – Nombres rationnels (positifs ou négatifs), notion d'opposé. – Fractions, fractions irréductibles, cas particulier des fractions décimales. – Définition de la racine carrée ; les carrés parfaits entre 1 et 144. – Les préfixes de nano à giga. ■ **Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels.** ■ **Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée.** – Ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire. – Égalité de fractions.	■ Rencontrer diverses écritures dans des situations variées (par exemple nombres décimaux dans des situations de vie quotidienne, notation scientifique en physique, nombres relatifs pour mesurer des températures ou des altitudes). ■ Relier fractions, proportions et pourcentages. ■ Associer à des objets des ordres de grandeurs (par exemple, la taille d'un atome, d'une bactérie, d'une alvéole pulmonaire, la longueur de l'intestin, la capacité de stockage d'un disque dur, la vitesse du son et de la lumière, la population française et mondiale, la distance de la Terre à la Lune et au Soleil, la distance du Soleil à l'étoile la plus proche). ■ Prendre conscience que certains nombres ne sont pas rationnels. ■ Montrer qu'il est toujours possible d'intercaler des rationnels entre deux rationnels donnés, contrairement au cas des entiers.

* *En **gras** : ce qui est traité dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

Les élèves ont utilisé les fractions comme fraction-partage en cycle 3 et ont commencé à travailler les fractions en tant que nombres en début de cycle 4. Il s'agit de consolider la fraction considérée comme un nombre (comparaison, simplification, produit en croix) tout en amorçant le travail sur les opérations (addition, soustraction, multiplication, division). Cela amènera en particulier la notion d'inverse et permettra de réinvestir le travail fait sur les nombres relatifs.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Effectuer des additions et soustractions de fractions (1) ■ Vidéo « *Je comprends* » : Effectuer des additions et soustractions de fractions (2) ■ Vidéo « *Je comprends* » : Effectuer des multiplications de fractions
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Tableur ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU construisent un tipi

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

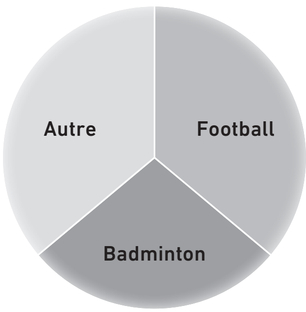
Activité 1. Additionner et soustraire des nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'addition des nombres en écritures fractionnaires peut être assez naturelle dès lors que le dénominateur est le même : le passage au français peut alors faciliter la compréhension (1 neuvième + 4 neuvièmes = 5 neuvièmes). Cela est plus délicat lorsque les dénominateurs sont différents. Cette activité permet de comprendre le mécanisme alors en jeu.

• *Correction*

1.



2. $\frac{5}{8}$

3. $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3+2}{8}=\frac{5}{8}$.

4. $\frac{3}{8}$

5. Pour additionner deux nombres, il faut qu'ils aient le même dénominateur

Activité 2. Additionner et soustraire des nombres en écriture fractionnaire

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Le procédé est identique pour additionner et soustraire deux fractions, il s'agit de s'y essayer sur quelques exemples pour s'assurer que cela est bien assimilé ! On peut alors passer à l'étape suivante : si les dénominateurs ne sont pas multiples l'un de l'autre.

• *Correction*

1. a. Multiples de 2 : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10.
Multiples de 3 : 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15.

b. Le nombre 6 se trouve dans les deux listes.

c. $\frac{5}{2}=\frac{5\times 3}{2\times 3}=\frac{15}{6}$ et $\frac{4}{3}=\frac{4\times 2}{3\times 2}=\frac{8}{6}$.

d. $\frac{5}{2}+\frac{4}{3}=\frac{15}{6}+\frac{8}{6}=\frac{15+8}{6}=\frac{23}{6}$.

2. a. $\frac{2}{7}+\frac{1}{4}=\frac{8}{28}+\frac{7}{28}=\frac{15}{28}$.

b. $\frac{8}{15}-\frac{1}{2}=\frac{16}{30}-\frac{15}{30}=\frac{1}{30}$.

c. $\frac{5}{6}-\frac{2}{9}=\frac{15}{18}-\frac{4}{18}=\frac{11}{18}$.

d. $\frac{9}{4}-\frac{1}{6}=\frac{27}{12}-\frac{2}{12}=\frac{25}{12}$.

e. $\frac{1}{9}+\frac{5}{12}=\frac{4}{36}+\frac{15}{36}=\frac{19}{36}$.

3. Pour ajouter (ou soustraire) deux fractions, il faut d'abord mettre les fractions au même dénominateur, puis ajouter (ou soustraire) les numérateurs.

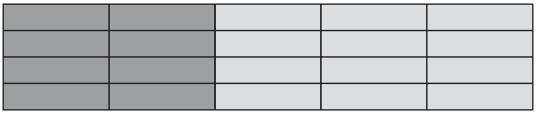
Activité 3. Multiplier des nombres en écriture fractionnaire

• Considérations didactiques et mise en pratique

La multiplication de fractions peut être abordée de façon assez simple à partir d'un exemple géométrique. Il s'agira ensuite de passer à une généralisation, sans avoir nécessairement recours à un rectangle ce qui peut être parfois délicat avec des grands nombres.

• Correction

1. et **2.**



3. Cela représente $\frac{6}{20}$, soit $\frac{3}{10}$.

4. $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$

5. Pour multiplier deux fractions, on multiplie entre eux les numérateurs et on multiplie entre eux les dénominateurs.

Activité 4. Diviser des nombres en écriture fractionnaire

• Considérations didactiques et mise en pratique

La division de deux fractions induit un travail préalable sur l'inverse. Ces deux notions sont liées et se doivent d'être abordées en parallèle.

• Correction

1. a. En noir : $\times\frac{3}{7}$; en vert : $\times\frac{7}{3}$.

b. $35\times\frac{3}{7}\times\frac{7}{3}=35$ et $15\times\frac{7}{3}\times\frac{3}{7}=15$.

Donc $\frac{3}{7}\times\frac{7}{3}$ et $\frac{7}{3}\times\frac{3}{7}=1$.

c. Les nombres $\frac{3}{7}$ et $\frac{7}{3}$ sont inverses l'un de l'autre, comme par exemple $\frac{11}{9}$ et $\frac{9}{11}$.

2. a. En noir : $\times\frac{3}{7}$; en violet : $:\frac{3}{7}$.

b. $15\times\frac{7}{3}=35$; $35\times\frac{3}{7}=15$; $15:\frac{3}{7}=35$; $35:\frac{7}{3}=15$.

c. Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

3. a. $15:\frac{5}{4}=15\times\frac{4}{5}=12$.

b. $\frac{3}{4}:\frac{7}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{28}$.

c. $\frac{8}{9}:\frac{12}{15}=\frac{8}{9}\times\frac{15}{12}=\frac{120}{108}=\frac{10}{9}$.

d. $\frac{9}{15}:6=\frac{9}{15}\times\frac{1}{6}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$.

■ Objectif 1. Additionner et soustraire des nombres en écriture fractionnaire simple

Je m'entraine

1 **a.** $\frac{5}{4}$ **b.** $\frac{9}{3}=3$ et $\frac{5}{3}$ **c.** $\frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}$

2 **a.** $\frac{4}{5}$ **b.** $\frac{7}{9}$ **c.** $\frac{22}{17}$ **d.** $\frac{5}{8}$

3 **a.** $\frac{1}{14}$ **b.** $\frac{3}{4}$ **c.** $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ **d.** $\frac{23}{48}$

4 **a.** $\frac{65}{100}=\frac{13}{20}$ **b.** $\frac{9}{25}$ **c.** $-\frac{17}{110}$ **d.** $-\frac{5}{18}$

5 **a.** $\frac{5}{27}$ **b.** $\frac{167}{180}$ **c.** $\frac{27}{11}$ **d.** $\frac{4}{75}$

6 **a.** $\frac{9}{4}$ **b.** $\frac{19}{3}$ **c.** $\frac{112}{45}$ **d.** $-\frac{16}{3}$

7 **a.** $\frac{26}{7}$ **b.** $\frac{29}{4}$ **c.** $\frac{4}{3}$ **d.** $\frac{16}{5}$

8 **a.** $\frac{17}{4}$ **b.** $\frac{15}{4}$ **c.** $\frac{10}{3}$ **d.** $\frac{8}{3}$

9 **a.** $\frac{48}{10}=\frac{24}{5}$ **b.** $\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$ **c.** $\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$ **d.** $\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$

10 **a.** $\frac{22}{18}=\frac{11}{9}$ **b.** $\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$ **c.** $\frac{26}{20}=\frac{13}{10}$ **d.** $\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$

11 **a.** $\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$ **b.** $\frac{16}{2}=8$ **c.** $\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$ **d.** $\frac{30}{24}=\frac{5}{4}$

12 **a.** $\frac{4}{39}$ **b.** $\frac{2}{39}$ **c.** $\frac{4}{51}$ **d.** $\frac{2}{51}$ **e.** $\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$ **f.** 0

13 **a.** $\frac{1}{3}:0<\frac{1}{3}<1$; $\frac{1}{3}=0+\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}=1-\frac{2}{3}$.

b. $\frac{9}{7}:1<\frac{9}{7}<2$; $\frac{9}{7}=1+\frac{2}{7}$; $\frac{9}{7}=2-\frac{5}{7}$.

c. $\frac{53}{4}:13<\frac{53}{4}<14$; $\frac{53}{4}=13+\frac{1}{4}$; $\frac{53}{4}=14-\frac{3}{4}$.

d. $\frac{23}{8}:2<\frac{23}{8}<3$; $\frac{23}{8}=2+\frac{7}{8}$; $\frac{23}{8}=3-\frac{1}{8}$.

e. $\frac{55}{9}:6<\frac{55}{9}<7$; $\frac{55}{9}=6+\frac{1}{9}$; $\frac{55}{9}=7-\frac{8}{9}$.

f. $\frac{2}{7}:0<\frac{2}{7}<1$; $\frac{2}{7}=0+\frac{2}{7}$; $\frac{2}{7}=1-\frac{5}{7}$.

g. $\frac{27}{5}:5<\frac{27}{5}<6$; $\frac{27}{5}=5+\frac{2}{5}$; $\frac{27}{5}=6-\frac{3}{5}$.

h. $\frac{64}{15}:4<\frac{64}{15}<5$; $\frac{64}{15}=4+\frac{4}{15}$; $\frac{64}{15}=5-\frac{11}{15}$.

i. $\frac{47}{100}:0<\frac{47}{100}<1$; $\frac{47}{100}=0+\frac{47}{100}$; $\frac{47}{100}=1-\frac{53}{100}$.

j. $\frac{27}{7}:3<\frac{27}{7}<4$; $\frac{27}{7}=3+\frac{6}{7}$; $\frac{27}{7}=4-\frac{1}{7}$.

14 **a.** $\frac{2}{7}+\frac{3}{14}-\frac{1}{21}=\frac{19}{42}$ **b.** $\frac{5}{6}-\frac{19}{3}+\frac{7}{18}-\frac{92}{18}=-\frac{46}{9}$

c. $\frac{7}{4}+\frac{1}{16}-\frac{9}{2}=-\frac{43}{16}$

Je résous des problèmes simples

15 **1.** $\frac{3}{20}+\frac{1}{10}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ **2.** $\frac{3}{4}$

16 $1-\frac{1}{3}-\frac{5}{18}=\frac{18}{18}-\frac{6}{18}-\frac{1}{18}=\frac{11}{18}$

17 **1.** $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$, soit $\frac{10}{24}$.

2. À 13 ans, on conseille de dormir $\frac{11}{24}$ de la journée, Tom est donc légèrement en-dessous de la durée conseillée.

18 **1.** $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ **2.** $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

19 **1.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

2. $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

3. $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$.

20 Lucas dépense 3/10 de son argent de poche en bonbons et 2/5 en chocolat. Il économise le reste.
Quelle fraction de son argent de poche a-t-il dépensée en friandises ?

21 **1.** $\frac{1}{7}\times 21=\frac{21}{7}=3$.

2. $\frac{21}{21}-\frac{1}{7}-\frac{3}{7}=\frac{21}{21}-\frac{3}{21}-\frac{9}{21}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.

■ Objectif 2. Additionner et soustraire des nombres en écriture fractionnaire dans le cas général

Je m'entraine

22 **a.** 42

b. $\frac{13}{42}$

c. $-\frac{19}{42}$

d. $\frac{13}{42}-\left(-\frac{19}{42}\right)=\frac{32}{42}=\frac{16}{21}$

23 **a.** $\frac{17}{6}$ **b.** $\frac{4}{21}$ **c.** $-\frac{1}{20}$ **d.** $\frac{29}{56}$ **e.** $-\frac{31}{12}$ **f.** $-\frac{13}{110}$

24 $\frac{5}{6}+\frac{3}{14}=\frac{5\times 7}{6\times 7}+\frac{3\times 3}{14\times 3}=\frac{35}{42}+\frac{9}{42}=\frac{44}{42}\left(=\frac{22}{21}\right)$.

25 **a.** $\frac{19}{10}$ **b.** $\frac{145}{84}$ **c.** $-\frac{233}{230}$ **d.** $-\frac{55}{36}$

26 **1.** $4\times 1=4$; $4\times 2=8$; $4\times 3=12$ et $6\times 1=6$; $6\times 2=12$.
Le plus petit multiple commun est 12.

2. a. $\frac{5}{12}$ **b.** $\frac{19}{12}$ **c.** $\frac{17}{12}$ **d.** $-\frac{30}{12}=-\frac{5}{2}$ **e.** $\frac{1}{12}$ **f.** $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{13}{12}$

27 **1.** $\frac{7}{12}+\frac{4}{15}=\frac{7\times 15}{12\times 15}+\frac{4\times 12}{15\times 12}=\frac{105}{180}+\frac{48}{180}=\frac{153}{180}$.

2. 60

3. $\frac{7}{12}+\frac{4}{15}=\frac{7\times 5}{12\times 5}+\frac{4\times 4}{15\times 4}=\frac{35}{60}+\frac{16}{60}=\frac{51}{60}$.

4. $\frac{51}{60}=\frac{51\times 3}{60\times 3}=\frac{153}{180}$.

28 **a.** $\frac{25}{63}$ **b.** $\frac{31}{15}$ **c.** $\frac{31}{6}$

Je résous des problèmes simples

29 $\frac{17}{3}+\frac{4}{5}+\frac{17}{3}+\frac{4}{5}=\frac{34}{3}+\frac{8}{5}=\frac{170}{15}+\frac{24}{15}=\frac{194}{15}$.

Le périmètre mesure $\frac{194}{15}$ cm.

30 $1-\frac{9}{100}-\frac{19}{100}-\frac{1}{5}-\frac{21}{100}-\frac{21}{100}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$.

31 **1.** $1-\frac{2}{5}-\frac{4}{25}-\frac{29}{100}=\frac{3}{20}$.

2. $1-\frac{21}{100}-\frac{6}{100}-\frac{14}{100}-\frac{11}{100}-\frac{13}{100}=\frac{35}{100}=\frac{13}{20}$.

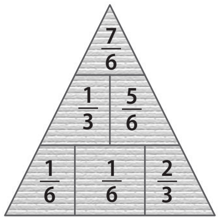
32 **1.** $BC=\frac{17}{10}-\frac{1}{3}=\frac{51}{30}-\frac{10}{30}=\frac{41}{30}$ cm.

2. $CA=\frac{41}{30}-\frac{11}{20}=\frac{82}{60}-\frac{33}{60}=\frac{49}{60}$ cm.

3. $\frac{17}{10}+\frac{41}{30}+\frac{49}{60}=\frac{102}{60}+\frac{82}{60}+\frac{49}{60}=\frac{233}{60}$ cm.

33 $\frac{1}{3}+\frac{7}{10}=\frac{31}{30}$, ce qui est supérieur à 1, ce n'est pas possible.

34



35 **1.** $DC+CB+BF=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{8}=\frac{53}{56}$.

2. $CE+EF+FA=\frac{3}{8}+\frac{2}{7}+\frac{3}{8}+\frac{2}{7}=\frac{37}{28}$.

3. $\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{8}+\frac{2}{7}+\frac{3}{8}+\frac{2}{7}=\frac{53}{28}$.

■ Objectif 3. Multiplier et diviser des nombres en écriture fractionnaire

Je m'entraine

36 **1. a.** $\frac{1}{5}$ et $\frac{20}{9}$.

2. a. Longueur du côté : $\frac{3}{2}$.

b. Périmètre triangle initial : $\frac{27}{16}$.

Périmètre deuxième triangle : $\frac{9}{2}$.

37 **a.** $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ **b.** $\frac{63}{22}$ **c.** $\frac{90}{133}$ **d.** $\frac{1}{120}$ **e.** $\frac{21}{400}$

38 **a.** $\frac{8}{7}$ **b.** $\frac{2}{11}$ **c.** $\frac{2}{23}$ **d.** $\frac{3}{22}$ **e.** $\frac{1}{24}$ **f.** $\frac{2}{5}$

39 **a.** $\frac{1}{4}$ **b.** $\frac{5}{3}$ **c.** $\frac{7}{27}$ **d.** $\frac{16}{7}$

40 **a.** $\frac{5}{2}$ **b.** $-\frac{7}{3}$ **c.** $-\frac{5}{15}=-\frac{1}{3}$ **d.** $-\frac{17}{8}$ **e.** $\frac{1}{5}$

41 **a.** 0,7 **b.** 2,4 **c.** 4 **d.** –4 **e.** $\frac{1}{3}$ **f.** $\frac{2}{3}$

42 **a.** $\frac{15}{28}$ **b.** $\frac{24}{55}$ **c.** $\frac{22}{9}$ **d.** $\frac{15}{8}$ **e.** $\frac{36}{7}$ **f.** $\frac{21}{40}$

43 **a.** $x\times y=\frac{6}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$;

$x:y=\frac{6}{5}:\frac{2}{3}=\frac{6}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$;

$\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}=\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$.

b. $x\times y=\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{49}{81}$;

$x:y=\frac{7}{9}:\frac{7}{9}=1$;

$\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}=\frac{9}{7}\times\frac{9}{7}=\frac{81}{49}$.

Je résous des problèmes simples

44 **1. a.** $\frac{11}{10}$ **b.** $\frac{47}{40}$ **c.** $\frac{26}{75}$ **2.** $\frac{47}{40}$

45 **1.** On note a la largeur du rectangle et b sa longueur $\frac{6}{7}a+\frac{6}{7}a+\frac{6}{7}b+\frac{6}{7}b=\frac{6}{7}(2a+2b)$, c'est donc bien $\frac{6}{7}$ fois le périmètre du rectangle ABCD.

2. a. $Aire_{IJKL}=longueur_{IJKL}\times largeur_{IJKL}=\frac{2}{3}\times longueur_{EFGH}\times\frac{5}{4}\times largeur_{EFGH}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}\times Aire_{EFGH}$.

donc $Aire_{IJKL}=\frac{5}{6}\times Aire_{EFGH}$.

b. $Aire_{EFGH}=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}Aire_{ABCD}=\frac{25}{36}\times Aire_{ABCD}$ donc

$Aire_{IJKL}=\frac{5}{6}\times\frac{25}{36}\times Aire_{ABCD}=\frac{125}{216}\times Aire_{ABCD}$.

46 Il reste deux tiers des bonbons et la moitié de deux tiers est un tiers.

47 $900:\frac{2}{5}=2\,250$. Les revenus sont donc de 2 250 euros.

48 Il reste 4/5 de la consommation en ville, soit 2,44 litres aux 100 km sur route.

49 **1.** $7\times\frac{3}{7}=3$; $3+5=8$; $8:\frac{1}{5}=40$.

2. $\frac{28}{15}\times\frac{3}{7}=\frac{4}{5}$; $\frac{4}{5}+5=\frac{29}{5}$; $\frac{29}{5}:\frac{1}{5}=29$.

3. $0\times\frac{1}{5}=0$; $0-5=-5$; $-5:\frac{3}{7}=-\frac{35}{3}$.

50 **1.** $\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{7}$.

2. $\frac{4}{7}$

3. $\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{21}$.

4. a. 210 **b.** 180 **c.** 240

51

$$\begin{tikzcd}
 & 21 \arrow[dr, "-\frac{13}{2}"] & \\
28 \arrow[ur, "\times\frac{3}{4}"] \arrow[dr, ":\frac{7}{2}"'] & & \frac{29}{2} \\
 & 8 \arrow[ur, "+\frac{13}{2}"'] &
\end{tikzcd}$$

Je travaille seul(e)

52 C **53** A **54** C **55** B **56** B

57 **a.** $\frac{10}{7}$ **b.** $\frac{12}{11}$ **c.** $\frac{2}{7}$ **d.** $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

58 **a.** $\frac{1}{7}$ **b.** $\frac{5}{14}$ **c.** 1 **d.** 0

59 **a.** $\frac{71}{100}$ **b.** $\frac{13}{75}$ **c.** $\frac{27}{60}$

60 **a.** $\frac{1}{22}$ **b.** $-\frac{24}{35}$ **c.** $\frac{29}{39}$

61 **a.** $\frac{16}{51}$ **b.** $-\frac{12}{25}$ **c.** $-\frac{43}{12}$

62 **a.** $\frac{13}{6}$ **b.** $\frac{35}{12}$ **c.** $-\frac{3}{28}$

63 $1-\frac{3}{10}-\frac{3}{10}-\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$.

64 **a.** $\frac{13}{14}$ **b.** $\frac{151}{72}$ **c.** $\frac{93}{85}$ **d.** $\frac{41}{42}$

65 **a.** $-\frac{11}{35}$ **b.** $\frac{65}{22}$ **c.** $-\frac{38}{35}$ **d.** $-\frac{3}{4}$

66 **a.** $\frac{137}{60}$ **b.** $\frac{47}{60}$

67 **a.** $-\frac{1}{15}$ **b.** $\frac{19}{8}$ **c.** $\frac{25}{14}$

68 **a.** $\frac{19}{72}$ **b.** $\frac{71}{28}$ **c.** $\frac{9}{20}$

69 **1.** Le périmètre est compris entre $3\times$ plus petite valeur et $3\times$ plus grande valeur, $3\times$ plus petite valeur $=3\times\frac{9}{7}=\frac{27}{7}$ et $3\times$ plus grande valeur $=3\times\frac{9}{5}=\frac{27}{5}$.

2. $\frac{9}{5}+\frac{9}{6}+\frac{9}{7}=\frac{321}{70}$.

3. $\frac{27}{7}=\frac{270}{70}$ et $\frac{27}{5}=\frac{27\times14}{5\times14}=\frac{378}{70}$.

On a bien $\frac{270}{70}<\frac{321}{70}<\frac{378}{70}$.

70 $1-\frac{17}{50}-\frac{3}{10}=\frac{9}{25}$.

71 **a.** $\frac{21}{5}$ **b.** $\frac{16}{7}$ **c.** $-\frac{20}{3}$ **d.** $-\frac{18}{11}$

72 **a.** $\frac{10}{21}$ **b.** $\frac{72}{77}$ **c.** $\frac{90}{63}=\frac{10}{7}$ **d.** $\frac{6}{91}$

73 **a.** $\frac{3}{8}$ **b.** $\frac{18}{5}$ **c.** $\frac{9}{28}$ **d.** $\frac{7}{8}$

74 **a.** $\frac{4}{7}$ **b.** $-\frac{5}{9}$ **c.** $-\frac{7}{4}$ **d.** $\frac{1}{6}$

e. $-\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}=-\frac{1}{5}$ **f.** $\frac{8}{5}\times\frac{-7}{24}=-\frac{7}{15}$

75 **a.** $\frac{1}{6}$ **b.** 2 **c.** $\frac{14}{5}$

76 On fait donc $\frac{15}{7}$ fois $\frac{7}{5}$ de tours ce qui donne $\frac{15}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{7}$ mm.

77 **a.** 2 **b.** $\frac{2}{3}$ **c.** $\frac{1}{6}$ **d.** $-\frac{1}{15}$ **e.** 1 **f.** $-\frac{5}{7}$ **g.** $-\frac{11}{6}$ **h.** $-\frac{13}{4}$

78 **a.** $\frac{22}{45}$ **b.** $\frac{39}{56}$ **c.** $\frac{85}{72}$ **d.** $\frac{15}{14}$ **e.** $\frac{21}{2}$ **f.** $\frac{15}{28}$

79 **a.** $\frac{8}{3}$ **b.** $\frac{21}{2}$ **c.** $\frac{8}{45}$

80 **a.** 12 **b.** $\frac{3}{4}$ **c.** $\frac{20}{9}$ **d.** $\frac{1}{9}$

e. $\frac{7}{2}:\frac{-3}{4}=-\frac{28}{6}=-\frac{13}{3}$ **f.** $-\frac{11}{8}:\frac{33}{12}=-\frac{11}{8}\times\frac{12}{33}=\frac{1}{288}$.

81 **a.** $\frac{3}{14}$ **b.** $\frac{5}{12}$ **c.** 27 **d.** $\frac{45}{4}$ **e.** $\frac{15}{28}$ **f.** $\frac{18}{7}$

82 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$.

On a bien $\frac{1}{4}>\frac{1}{5}$.

Je résous des problèmes

83 **a.** – **b.** × **c.** – **d.** + **e.** : **f.** :

84 Les deux tiers des trois quarts, soit $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$, la moitié des joueurs de Minecraft ont entre 25 et 29 ans.

85 $\frac{55}{1018}\times\frac{509}{7\,450}=\frac{11}{2\,980}$.

86 **1.** Chocolat : 200 g ; beurre : 125 g ; sucre : 200 g ; farine : 100 g.
2. $6=\frac{3}{4}\times 8$: on multiplie toutes les doses par trois quarts, il suffit pour cela de choisir $t = 112{,}5$ g avec 3 œufs et ¾ de sachet de levure.

87 $$1-\frac{27}{50}-\frac{37}{109}-\frac{116}{1000}$$
$$=\frac{109\,000}{109\,000}-\frac{58\,860}{109\,000}-\frac{37\,000}{109\,000}-\frac{12\,644}{109\,000}$$
$$=\frac{496}{109\,000}$$
$$=\frac{62}{13\,625}.$$

88 Il reste $\frac{13}{16}$ de la consommation d'essence à 110 km/h, soit $8\times\frac{13}{16}=6{,}5$ litres aux 100 km.

89 **1.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$.
2. Il reste $\frac{1}{12}$ d'espace sur la clé.

90 **1.** $\frac{145}{16}=9+\frac{1}{16}$.
2. 9

91 La lettre M apparait 65 fois dans un texte de 2 500 lettres en anglais car $\frac{65}{81}\times 81=65$.
S'il y a 5 fois moins de lettres dans le texte, la lettre M apparaitra en moyenne 5 fois moins, soit 13 fois.

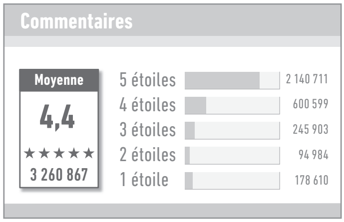
92 $\frac{1}{c}=\frac{1}{10}+\frac{1}{35}=\frac{9}{70}$, d'où $c=\frac{70}{9}$.

93 $\frac{26}{31}\times 7{,}28=\frac{26}{31}\times\frac{182}{25}=\frac{4732}{775}$, soit environ 6,10 m.

94 **a.** On additionne les deux plus grandes fractions : $\frac{5}{3}+\frac{13}{9}=\frac{28}{9}$.
b. On divise la plus grande fraction par la plus petite : $\frac{5}{3}\div\frac{3}{11}=\frac{55}{9}$.
c. On multiplie les deux plus petites fractions : $\frac{3}{7}\times\frac{3}{11}=\frac{9}{77}$.
d. On soustrait de la plus grande fraction la plus petite : $\frac{5}{3}-\frac{3}{11}=\frac{46}{33}$.

95 **1.** $828:\frac{138}{7}=42$ m.
2. $828\times\frac{250}{207}=1000$ m.

96



$\frac{2}{3}$ et $\frac{13}{20}$ sont proches. $\frac{13}{20}$ est la plus proche.

97 **1.** $\frac{11}{80}$ **2.** $\frac{1}{5}$

98 **a.** $\frac{4}{5}\times\frac{17}{80}=\frac{68}{400}=\frac{17}{100}$.
b. $\frac{1}{5}\times\frac{17}{80}=\frac{17}{400}$, soit 4,25 % du temps.

Dans les autres matières

99 **1. a.** $3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ **b.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$
c. $\frac{1}{2}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$ **d.** $\frac{3}{2}$
2. $\frac{15}{4}=3+\frac{3}{4}$. On peut donc mettre : 6 blanches pour faire 3 et 3 noires pour les ¾.
2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$. Il manque donc 1/16, soit une double-croche.

100 **1.** 60
2.

	Boys	girls
Pass	45	60
fail	15	20

Jeux mathématiques

101 Jeu à jouer en classe

102 $A = 2\,520$. L'inverse demandé est 144.

103 Il faut aller jusqu'à $\frac{1}{128}$.

Devoirs à la maison

104 **1.** Ce document recense, pour chaque pays, le pourcentage de sa population capable de tenir une conversation en anglais.
2. $\frac{39}{100}\times 64\,200\,000=25\,038\,000$, soit un peu plus de 25 millions.
Le taux en Finlande est 70 %, on en déduit le nombre d'habitants : 5 500 000.

105 **1. a.** 3 **b.** 7
2. a. $B=\frac{3}{2}$; $C=\frac{17}{12}$; $D=\frac{577}{408}$.
b. $E\approx 1{,}414213$ ou $1{,}414214$;
$1{,}414213^2\approx 1{,}999998409$;
$1{,}414214^2\approx 2{,}000001238$.
On a donc bien une valeur très proche de 2.

■ Avec un logiciel

Activité 1. Fractions aléatoires

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet de travailler deux compétences essentielles :

– l'utilisation du tableur avec usage de quelques fonctions spécifiques. On pourra par exemple mettre en évidence la différence entre l'usage du « : » et celui du « ; » dans une formule ;

– une approche de l'aléatoire, ce qui doit être mené tout au long du cycle 4.

• Correction

1. =alea()

Questions 2. à 6 : Dans le fichier tableur corrigé.

7. On observe une forme proche d'un triangle. Comme la première valeur est toujours plus petite que la deuxième, on se trouve au-dessus de la première bissectrice des axes.

8. a. = MOYENNE(C1:C1000) **b.** =MOYENNED1:D1000)

9. La moyenne ne varie pas (ou pratiquement pas).

10. On peut estimer la moyenne à ½, ce que confirme =MOYENNE(C1:D1000)

Activité 2. Des triangles et des fractions

• Considérations didactiques et mise en pratique

On a ici une approche de la notion de médiane par le biais du logiciel. Le côté dynamique de ce logiciel permettra de formuler une conjecture.

• Correction

Questions 1 à 5 : voir fichier GeoGebra.

5. On peut supposer que $GA = 2 \times GI$.

6. De même, on peut supposer que $GB = 2 \times GI$ et $GC = 2 \times GK$, aux arrondis près.

7. « Le point G semble être situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane en partant du sommet du triangle. »

8. Voir fichier GeoGebra.

9. $A_{AKC} = A_{BKC} = \frac{1}{2} A_{ABC}$, calcul utilisant $\frac{base \times hauteur}{2}$ où la hauteur est la même pour les trois triangles et où la base $AB = 2AK = 2KB$.

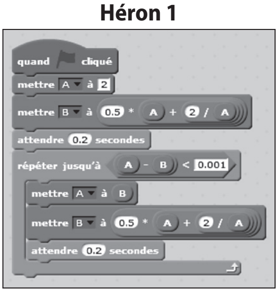
Activité 3. L'algorithme de Héron d'Alexandrie

Considérations didactiques et mise en pratique

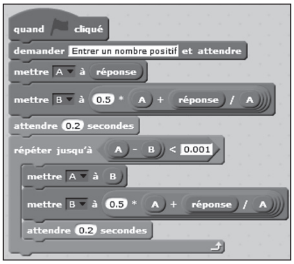
Cet algorithme très classique permet d'aborder une notion délicate de la programmation : la variable.

• Correction

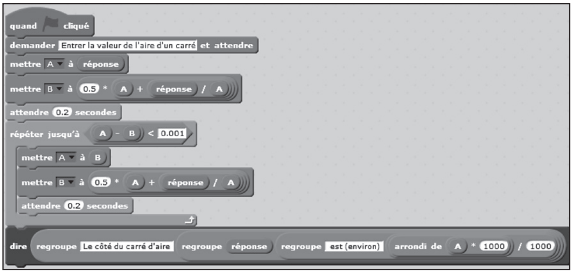
Héron 1



Héron 2



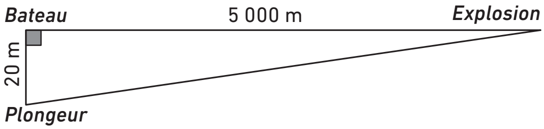
Héron 3



■ Tâches complexes

1. Une plongée explosive

Au tiers du volume initial, le plongeur est à 20 m de profondeur.



La distance Explosion-Plongeur est obtenue par l'utilisation du théorème de Pythagore (ou par une figure à l'échelle) : 5 000,04 m.

L'écart est donc négligeable et le plongeur entendra l'explosion avant le capitaine du bateau.

Temps en secondes jusqu'au plongeur : $\frac{5\,000,04}{1480} \approx 3,38$ s.

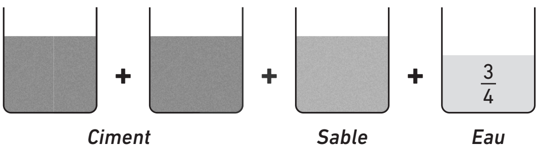
Temps en secondes jusqu'au bateau : $\frac{5\,000}{340} \approx 14,71$ s.

14,71 – 3,38 =11,33 s.

Le plongeur entendra l'explosion environ 11 secondes avant le capitaine du bateau.

2. Les Dudu construisent un tipi

Le dosage indique :



Donc : 2 doses + 1 dose + $\frac{3}{4}$ dose = 12 L, soit $\frac{15}{4}$ doses = 12 L.

1 dose = $\frac{48}{15}$ L, soit 3,2 L. Il ne faut que $\frac{3}{4} \times 3,2$ L d'eau, soit 2,4 litres d'eau et non 5 litres.

chapitre 3

Puissances

I. Programme

Thème A – Nombres et calculs

Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maitrise des procédures de calcul. Les différentes composantes de ce thème sont reliées entre elles. Les élèves manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils prennent conscience du fait qu'un même nombre peut avoir plusieurs écritures (notamment écritures fractionnaire et décimale). Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour résoudre des problèmes faisant intervenir des équations ou inéquations du premier degré. À l'occasion d'activités de recherche, ils peuvent rencontrer la notion de nombres irrationnels, par exemple lors d'un travail sur les racines carrées.

Attendus de fin de cycle

- Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes
- Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers
- Utiliser le calcul littéral

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes	
■ **Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ; passer d'une représentation à une autre*.** – Nombres décimaux. – Nombres rationnels (positifs ou négatifs), notion d'opposé. – Fractions, fractions irréductibles, cas particulier des fractions décimales. – Définition de la racine carrée ; les carrés parfaits entre 1 et 144. – **Les préfixes de nano à giga**	■ Rencontrer diverses écritures dans des situations variées (par exemple nombres décimaux dans des situations de vie quotidienne, notation scientifique en physique, nombres relatifs pour mesurer des températures ou des altitudes). ■ Relier fractions, proportions et pourcentages. ■ Associer à des objets des ordres de grandeurs (par exemple, la taille d'un atome, d'une bactérie, d'une alvéole pulmonaire, la longueur de l'intestin, la capacité de stockage d'un disque dur, la vitesse du son et de la lumière, la population française et mondiale, la distance de la Terre à la Lune et au Soleil, la distance du Soleil à l'étoile la plus proche). ■ Prendre conscience que certains nombres ne sont pas rationnels.
■ **Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels.** ■ **Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée.** – Ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire. – Égalité de fractions. ■ **Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté.**	■ Montrer qu'il est toujours possible d'intercaler des rationnels entre deux rationnels donnés, contrairement au cas des entiers. ■ Pratiquer régulièrement le calcul mental ou à la main, et utiliser à bon escient la calculatrice ou un logiciel.

■ **Calculer avec des nombres relatifs, des fractions ou des nombres décimaux (somme, différence, produit, quotient).** ■ **Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.** ■ **Effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique.** – **Définition des puissances d'un nombre (exposants entiers, positifs ou négatifs).**	■ Effectuer des calculs et des comparaisons pour traiter des problèmes (par exemple, comparer des consommations d'eau ou d'électricité, calculer un indice de masse corporelle pour évaluer un risque éventuel sur la santé, déterminer le nombre d'images pouvant être stockées sur une clé USB, calculer et comparer des taux de croissance démographique).

** En **gras** : ce qui est traité dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

La notation des nombres avec des puissances doit permettre aux élèves d'écrire des nombres sous une autre forme. En classe de sixième et de cinquième, les élèves ont déjà rencontré la notation « au carré » et « au cube » au travers d'exemples numériques ou pour les unités de mesures d'aires et de volumes.
En quatrième, la puissance d'exposant n d'un nombre a doit être définie pour tout entier n supérieur ou égal à 2 comme étant le produit de n nombres tous égaux à a. Ensuite, pour les opérations utilisant les puissances, plutôt que de les mémoriser, les élèves doivent être capables de les reconstruire en revenant à la définition de la puissance d'un nombre et aux propriétés de la multiplication.
Pour montrer l'intérêt et les usages des écritures utilisant les puissances, notamment pour les travaux scientifiques, il nous est apparu opportun de réserver une grande part de nos activités et exercices à des exemples et des problèmes scientifiques utilisant les puissances.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Utiliser la notation sous forme de puissance ■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer avec des puissances de 10 ■ Vidéo « *Je comprends* » : Écrire un nombre sous son écriture scientifique
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Tableur ■ Activité 3 : Tableur ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : Fiches logiciel (Tableur) et leurs tutoriels vidéos
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU et l'échiquier

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Découvrir la notation des puissances

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité, basée sur la propagation d'une rumeur, permet aux élèves de ressentir le besoin d'une nouvelle notation plus « courte » pour écrire le produit de plusieurs nombres tous égaux.

L'introduction la notation 3^{10} comme étant une autre écriture du nombre $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ permettra rapidement de généraliser pour indiquer que a^n est une notation pour écrire le produit de n nombres tous égaux à a. L'utilisation de la calculatrice pourra être introduite dans cette activité.

• Correction

1. $3 \times 3 = 9$ nouvelles personnes apprennent l'information le 2 avril.

$3 \times 3 \times 3 = 27$ nouvelles personnes apprennent l'information le 3 avril.

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ nouvelles personnes apprennent l'information le 4 avril.

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ nouvelles personnes apprennent l'information le 5 avril.

2. 10 avril : $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

3. 1er mai : 3×3 (30 facteurs tous égaux à 3).

4. Cette écriture est très longue, on utilise donc la notation 3^{30} pour la raccourcir.

Activité 2. Découvrir les puissances d'exposant négatif

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet d'introduire les puissances d'exposant négatif. Elle met en jeu les puissances de 10 qui revêtent une importance toute particulière pour les travaux scientifiques et mettra en évidence l'intérêt de l'utilisation des puissances de 10 pour écrire des grands nombres et des petits nombres.

Là encore, la définition d'une nouvelle notation : 10^{-n} comme étant l'inverse de 10^n (c'est-à-dire $\frac{1}{10^n}$) pourra faciliter la généralisation vers le sens de l'écriture a^{-n}.

• Correction

1. $10 = 10^1$	$100 = 10^2$
$1\,000 = 10^3$	$10\,000 = 10^4$
$1\,000\,000 = 10^6$	$1\,000\,000\,000 = 10^9$
2. a. $0{,}1 = 10^{-1}$	$0{,}01 = 10^{-2}$
$0{,}001 = 10^{-3}$	$0{,}0001 = 10^{-4}$
$0{,}000\,001 = 10^{-6}$	$0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$

b. Les grands nombres (et les petits) sont écrits de façon plus courte avec les puissances de 10.

3. Voir réponse **2 a.**

Activité 3. Calculer avec les puissances de 10

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet de découvrir les formules pour calculer le produit de puissances d'un même nombre, le quotient de puissances d'un même nombre et la puissance d'une puissance d'un nombre.

Comme le suggère le programme, plutôt que de mémoriser des formules, les élèves doivent être capables de les reconstruire en revenant à la définition de la puissance d'un nombre et aux propriétés de la multiplication.

• Correction

1. $10^4 \times 10^2 = 10^6$

$10^6 \times 10^3 = 10^9$

$10^7 \times 10^1 = 10^8$

2. Oui, les trois résultats peuvent s'écrire sous la forme d'une puissance de 10.

3. On peut penser que le produit de deux puissances de 10 est égale à une puissance de 10 dont l'exposant est égal à la somme des exposants des puissances multipliées.

4. $\frac{10^4}{10^2} = 10^2$ $\quad \frac{10^6}{10^3} = 10^3$ $\quad \frac{10^7}{10^1} = 10^6$

5. Oui, les trois résultats peuvent s'écrire sous la forme d'une puissance de 10.

6. On peut penser que le quotient de deux puissances de 10 est égale à une puissance de 10 dont l'exposant est égal à la différence des exposants des puissances divisées.

7. $(10^4)^2 = 10^8$ $\quad (10^6)^3 = 10^{18}$ $\quad (10^7)^1 = 10^7$

8. Oui, les trois résultats peuvent s'écrire sous la forme d'une puissance de 10.

9. On peut penser qu'une puissance de puissance de 10 est égale à une puissance de 10 dont l'exposant est égal au produit des exposants.

Activité 4. Découvrir et utiliser la notation scientifique

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité autour des différentes écritures d'un même nombre décimal ambitionne de faire découvrir aux élèves qu'un nombre peut s'écrire de plusieurs façons en utilisant les puissances de 10. L'une des écritures est la notation scientifique.

Les élèves pourront ainsi découvrir l'intérêt de ces écritures pour exprimer les grands nombres (masse de la Terre en kg) et les petits nombres (masse d'une molécule d'eau en g).

• Correction

1. L'écriture de ces deux masses est très longue et difficile à lire.

2. Masse de la Terre :

$5\,972 \times 10^{21}$ kg $= 5\,972\,000 \times 10^{18}$ kg $= 5{,}972 \times 10^{24}$ kg.

3. Masse d'une molécule d'eau :

$0{,}03 \times 10^{-21}$ g $= 0{,}3 \times 10^{-22}$ g $= 3 \times 10^{-23}$ g.

4. Les écritures scientifiques sont :

Masse de la Terre : $5{,}972 \times 10^{24}$ kg.

Masse d'une molécule d'eau : 3×10^{-23} g.

Objectif 1. Connaitre et utiliser la notation puissance

Je m'entraine

1 **a.** 4 ; 16 ; 64 ; 256.
b. 64 ; 125 ; 1 000 ; 1 000 000.

2 **a.** 2^4
b. 3^5
c. 4^6
d. 5^7

3 **a.** 10^5
b. $2{,}5^4$
c. 17^3
d. $1{,}3^6$

4 **a.** $(-3)^6$
b. $(-3{,}5)^4$
c. $(-22)^3$
d. $(-1{,}8)^5$

5 **a.** $2^3 = 8$; $3^2 = 9$ et $2 \times 3 = 6$
b. $5^2 = 25$; $2^5 = 32$ et $5 \times 2 = 10$

6

a. 4	**b.** 16	**c.** 64
d. 9	**e.** 9	**f.** 81
g. 100	**h.** 1 000 000	**i.** 1 000 000 000
j. – 5	**k.** 25	**l.** – 125

7 **a.** 9^{-2} **b.** 7^{-3}
c. 3^{-4} **d.** 6^{-5}

8 **a.** 10^{-4}
b. $(-5)^{-3}$

9 **a.** 0,1
b. 0,01
c. 0,001
d. 0,5
e. 0,25
f. 0,125

10 **a.** $2^3 = 8$
b. $3^4 = 81$
c. $2^6 = 64$
d. $4^3 = 64$
e. $10^5 = 100\,000$
f. $5^4 = 625$

Je résous des problèmes simples

11 **a.** $7^6 = 117\,649$
b. $4^{11} = 4\,194\,304$
c. $8^9 = 134\,217\,728$
d. $6^7 = 279\,936$
e. $11^4 = 14\,641$
f. $9^8 = 43\,046\,721$

12 **a.** $(-11)^3 = -1\,331$
b. $(-11)^4 = 14\,641$
c. $(-11)^5 = -161\,051$
d. $(-4{,}2)^2 = 17{,}64$
e. $(-4{,}2)^3 = -74{,}088$
f. $(-4{,}2)^4 = 311{,}1696$

13 Seul le B est correct.

$A = 17 - 7^2$	$B = 7 + 4^3$	$C = 2 \times (4 - 9)^3$
$A = 17 - 49$	$B = 7 + 64$	$C = 2 \times (-5)^3$
$A = -32$	$B = 71$	$C = 2 \times (-125)$
		$C = -250$

14 **1.** En 7730.
2. 2,5 mg en 13460 et 1,25 mg en 19190.

15 **1.** 2 bonnes réponses : 2 €.
5 bonnes réponses : 16 €.
2. $2^{20} = 1\,048\,576$ €.
3. C'est impossible. $2^{13} = 8\,192$ € et $2^{14} = 16\,384$ €.

16 **1.** $6^4 = 1\,296$ combinaisons.
2. $1\,296 \times 15 = 19\,440$ s, soit 324 min soit 5 h 24 min.

17 En 2 ans : $100 \times 3^2 = 900$ cochons.
En 5 ans : $100 \times 3^5 = 24\,300$ cochons.
En 8 ans : $100 \times 3^8 = 656\,100$ cochons.

Objectif 2. Calculer avec des puissances de 10

Je m'entraine

18 **a.** 10^3
b. 10^7
c. 10^{-4}
d. 10^7
e. 10^{-1}
f. 10^{20}

19 **a.** 10^2
b. 10^3
c. 10^4
d. 10^5
e. 10^6
f. 10^9

20 **a.** 10^{-1}
b. 10^{-2}
c. 10^{-3}
d. 10^{-4}
e. 10^{-6}
f. 10^{-9}

21 **a.** 10^3
b. 10^4
c. 10^7
d. 10^{11}

22 **a.** 10^{-1}
b. 10^{-3}
c. 10^{-6}
d. 10^{-9}

23 **a.** 10^{6}
b. 10^{7}
c. 10^{8}
d. 10^{12}
e. 10^{14}
f. 10^{9}

24 **a.** 10^{1}
b. 10^{-1}
c. 10^{-7}
d. 10^{0}
e. 10^{9}
f. 10^{-4}

25 **a.** 10^{5}
b. 10^{6}
c. 10^{5}
d. 10^{-3}

26 **a.** 10^{1}
b. 10^{-6}
c. 10^{-9}
d. 10^{9}

27 **a.** 10^{6}
b. 10^{12}
c. 10^{10}
d. 10^{8}
e. 10^{100}
f. 10^{0}

28 **a.** 10^{-6}
b. 10^{-12}
c. 10^{-5}
d. 10^{8}
e. 10^{-100}
f. 10^{0}

Je résous des problèmes simples

29 $O = 10^6$
$I = 10^{-3}$
$N = 10^0$
$J = 10^5$
$B = 10^{-6}$
$U = 10^7$
$É = 10^{20}$
$E = 10^{-1}$
Le message est : « bien joué ».

30 Ils sont tous égaux à 10^7, sauf le **e.** égal à 10^8.

31 100 millions de litres $= 10^8$ L $= 10^5$ m^3 $= 10^{-4}$ km^3.
La couche a une épaisseur de 10^{-3} mm, soit 10^{-9} km.
$10^{-4} : 10^{-9} = 10^5$, donc l'aire de la nappe de pétrole est d'environ 10^5 km^2.

32 Un moucheron : 10^{-6} kg.
Un litre d'eau : 10^0 kg.
Une voiture : 10^3 kg.
Une baleine bleue : 10^5 kg.

33 10^{24} sabords.

34 **2.** 8 Go = 8 000 000 000 octets.

35 **1.** On doit appuyer successivement sur 29 touches du clavier.
2. Dans la formule, en remplaçant c par 2 et n par 19, on obtient : $2 \times (19+1) - \dfrac{10^2 - 1}{9} = 2 \times 20 - \dfrac{99}{9} = 29$.
3. Dans la formule, en remplaçant c par 4 et n par 9 999, on obtient : $4 \times (9\,999+1) - \dfrac{10^4 - 1}{9} = 40\,000 - \dfrac{9\,999}{9} = 38\,889$.
Pour écrire tous les nombres de 1 à 9 999, on doit appuyer successivement sur 38 889 touches du clavier.

Objectif 3. Utiliser la notation scientifique

Je m'entraine

36 **a.** 3×10^4
b. 5×10^{-3}
c. $1{,}4 \times 10^8$
d. $3{,}5 \times 10^{-5}$
e. $1{,}5 \times 10^8$
f. 4×10^{-10}

37 **a.** 5×10^3
b. 3×10^6
c. $1{,}5 \times 10^8$
d. $1{,}2 \times 10^{10}$

38 **a.** 7×10^{-1}
b. 4×10^{-3}
c. $7{,}5 \times 10^{-1}$
d. $8{,}9 \times 10^{-5}$

39 **a.** 5 000 000
b. 7 000
c. 0,002
d. 0,000 009

40 **a.** 7 300 000 000
b. 2 650 000
c. 0,099
d. 0,000 851

41 **a.** 4×10^3
b. $7{,}2 \times 10^5$
c. $6{,}7 \times 10^7$
d. $8{,}1 \times 10^{11}$

42 **a.** 2×10^{-3}
b. $1{,}4 \times 10^{-5}$
c. $2{,}3 \times 10^{-7}$
d. $6{,}05 \times 10^{-9}$

43 **a.** $2{,}7 \times 10^{4}$ **b.** $1{,}8 \times 10^{8}$
c. $3{,}9 \times 10^{-5}$ **d.** $7{,}2 \times 10^{-2}$

44 **a.** $2{,}5 \times 10^{5}$
b. $7{,}2 \times 10^{-7}$
c. $8{,}8 \times 10^{6}$
d. $6{,}6 \times 10^{-7}$

Je résous des problèmes simples

45 **a.** 7×10^{6}
b. $2{,}55 \times 10^{7}$
c. $6{,}48 \times 10^{6}$
d. $2{,}805 \times 10^{8}$
$6{,}48 \times 10^{6} < 7 \times 10^{6} < 2{,}55 \times 10^{7} < 2{,}805 \times 10^{8}$

46 **a.** $2{,}79 \times 10^{10}$
b. $2{,}45 \times 10^{13}$
c. $1{,}4 \times 10^{5}$
d. $4{,}55 \times 10^{-10}$
$4{,}55 \times 10^{-10} < 1{,}4 \times 10^{5} < 2{,}79 \times 10^{10} < 2{,}45 \times 10^{13}$

47 **a.** 540 000 kg $= 5{,}4 \times 10^{5}$ kg
b. 7 500 kg $= 7{,}5 \times 10^{3}$ kg
c. 0,029 kg $= 2{,}9 \times 10^{-2}$ kg
d. 0,000 000 003 kg $= 3 \times 10^{-9}$ kg

48 Appolo 11 : $3{,}84 \times 10^{5}$ km.
Anguille : 6×10^{3} km.
Marco Polo : 2×10^{4} km.
Lumière : $1{,}5 \times 10^{8}$ km.
Lumière > Appolo 11 > Marco Polo > Anguille.

49

Astres	Diamètre (en km) Écriture entière ou décimale	Notation scientifique
Soleil	1 400 000	$1{,}4 \times 10^{6}$
Mercure	4 900	$4{,}9 \times 10^{3}$
Vénus	12 100	$1{,}21 \times 10^{4}$
Terre	12 700	$1{,}27 \times 10^{4}$
Mars	6 800	$6{,}8 \times 10^{3}$
Jupiter	140 000	$1{,}4 \times 10^{5}$
Saturne	121 000	$1{,}21 \times 10^{5}$
Uranus	51 000	$5{,}1 \times 10^{4}$
Neptune	48 500	$4{,}85 \times 10^{4}$

Mercure ; Mars ; Vénus ; Terre ; Neptune ; Uranus ; Saturne ; Jupiter.

50 $(2 \times 10^{-6}) : (14 \times 10^{-9}) = 143$.
On a divisé la taille des puces par 143 en 10 ans.

51 Nombre de minutes par an : $60 \times 24 \times 365{,}25$ soit 525 960 minutes par an.
Nombre de battements jusqu'à 65 ans :
$525\,960 \times (1 \times 140 + 2 \times 110 + 3 \times 105 + 7 \times 95 + 52 \times 70)$
$= 2{,}6 \times 10^{9}$ battements environs
Total pour un homme :
$2{,}6 \times 10^{9} + 525\,960 \times 14 \times 65 = 3{,}1 \times 10^{9}$ battements environ.
Total pour une femme :
$2{,}6 \times 10^{9} + 525\,960 \times 20 \times 65 = 3{,}3 \times 10^{9}$ battements environ.

52 Les rapports des tailles sont les mêmes.

$$\frac{\text{Balle}}{\text{atome}} = \frac{2{,}1\text{ cm}}{67} \times 10^{-12}\text{ m}$$
$$= \frac{2{,}1 \times 10^{2}\text{m}}{67} \times 10^{-12}\text{ m}$$
$$= 3 \times 10^{8}\text{ environ}$$

$$\frac{\text{Terre}}{\text{balle}} = \frac{6\,371\text{ km}}{2{,}1\text{ cm}}$$
$$= \frac{6\,371 \times 10^{3}\text{km}}{2{,}1} \times 10^{-2}\text{ m}$$
$$= 3 \times 10^{8}\text{ environ}$$

Je travaille seul(e)

53 B **54** C **55** B **56** A **57** C

58 **a.** 7^{4} **b.** $(-5)^{3}$ **c.** 13^{5} **d.** $(-2{,}5)^{4}$

59 **a.** 6^{-4} **b.** $4{,}3^{-5}$ **c.** $(-8{,}1)^{-3}$ **d.** $(-7{,}51)^{-2}$

60 **a.** $2^{4} = 16$ **b.** $2^{-1} = 0{,}5$ **c.** $3^{3} = 27$ **d.** $3^{4} = 81$
e. $5^{3} = 125$ **f.** $5^{-1} = 0{,}2$ **g.** $10^{4} = 10\,000$ **h.** $10^{-3} = 0{,}001$

61 **a.** $2^{3} = 8$ **b.** $2^{6} = 64$ **c.** $10^{2} = 100$
d. $10^{5} = 100\,000$
e. $(-3)^{3} = -27$ **f.** $(-3)^{4} = 81$ **g.** $0{,}1^{2} = 0{,}0$ **h.** $0{,}1^{4} = 0{,}0001$

62 **a.** $10^{-1} = 0{,}1$ **b.** $10^{-2} = 0{,}01$ **c.** $10^{-3} = 0{,}001$
d. $10^{-6} = 0{,}000\,001$ **e.** $2^{-2} = 0{,}25$ **f.** $2^{-3} = 0{,}125$
g. $(-5)^{-1} = -0{,}2$ **h.** $(-5)^{-2} = 0{,}04$

63

a	a^2	a^3	a^4	a^5
2	4	8	16	32
5	25	125	625	3 125
-1	1	-1	1	-1
-3	9	-27	81	-243

64 Aucun n'est correct.
$A = 28 - 8^{2}$ $B = 8 + 2^{4}$ $C = (-3)^{3} + (-2)^{4}$
$A = 28 - 64$ $B = 8 + 16$ $C = -27 + 16$
$A = -36$ $B = 24$ $C = -9$

65 a. 10^2 b. 10^3 c. 10^5 d. 10^7

66 a. 10^{-1} b. 10^{-2} c. 10^{-4} d. 10^{-6}

67 a. 10^5 b. 10^7 c. 10^{-9} d. 10^2
e. 10^5 f. 10^{10} g. 10^8 h. 10^6 i. 10^{-10}

68 a. 10^6 b. 10^3 c. 10^4 d. 10^{17}

69 a. Elle dispose de 100 Go d'espace libre.
b. 100 Go : 10 Mo $= (100 \times 10^9) : (10 \times 10^6) = 10^4 = 10\,000$.
Elle peut stocker 10 000 fichiers de 10 Mo chacun.

70 a. 12 000 et $1{,}2 \times 10^4$.
b. 4 000 000 et 4×10^6.
c. 230 000 000 et $2{,}30 \times 10^8$.
d. 9 000 000 000 et 9×10^9.

71 a. 0,3 et 3×10^{-1}. **b.** 0,09 et 9×10^{-2}.
c. 0,014 et $1{,}4 \times 10^{-2}$. **d.** $0{,}000\,005 \times 10^{-6}$.

72 a. 40 000 **b.** 500 000 **c.** 0,003
d. 834 **e.** 9 500 000 **f.** 0,0072

73 a. $1{,}5 \times 102$ **b.** $1{,}27 \times 105$ **c.** 5×108
d. $5 \times 10–3$ **e.** $2{,}3 \times 10^{-4}$ **f.** 7×10^{-8}

74 $C = 6 \times 10^9$

75 $1{,}4 \times 10^5$ km $<$ $3{,}8 \times 10^5$ km. Donc le diamètre de Jupiter est inférieur à la distance Terre-Lune, Louis a raison.
$(0{,}15 \times 10^9) : (3{,}8 \times 10^5) = 394$, soit environ 400. La distance Terre-Soleil est environ 400 fois plus grande qua la distance Terre-Lune, Anna n'a pas raison.

Je résous des problèmes

76 1. 1 MW $= 10^6$ W et 1 GW $= 10^9$ W.
2. a. $4\,500 \times (2 \times 10^6) = 9 \times 10^9$ W.
La puissance du parc éolien terrestre français est donc de 9 gigawatts.
b. $6 \times 10^9 : (5 \times 10^6) = 1{,}2 \times 10^3$, donc la France doit installer 1 200 éoliennes offshore.
3. $63 \times 10^9 : (2 \times 10^6) = 3{,}15 \times 10^4$, donc il faudrait 31 500 éoliennes terrestres pour remplacer le parc nucléaire.

77 L'affirmation d'Hugo est vraie :
1,4 kg : $(9 \times 10^{-31}$kg$) \approx 1{,}56 \times 10^{30}$
et $(2 \times 10^{30}$ kg$)$: 1,4 kg $\approx 1{,}4 \times 10^{30}$.
En termes de masse, un électron est à une pastèque ce qu'une pastèque est au Soleil.

78 1. 21 chiffres sont nécessaires pour écrire un trilliard en nombre entier.
2. Pour les américains : 1 billion $= 10^9$, c'est-à-dire un milliard pour nous et 1 trillion $= 10^{12}$, c'est-à-dire un billion pour nous.
3. 101 chiffres sont nécessaires pour écrire un Gogol qui est égal à 10^{100}, c'est-à-dire un 1 et cent 0 derrière.

79 $86 \times 10^9 \times 10\,000 = 8{,}6 \times 10^{13}$
$100 \times 10^9 \times 10\,000 = 1 \times 10^{14}$
Le nombre de synapses est donc compris entre $8{,}6 \times 10^{13}$ et 1×10^{14}.

80 1. La hauteur de la pile de papier après 1 pliage est de 0,2 mm.
Après *n* pliages : $0{,}1 \times 2^n$ mm.
Après 22 pliages : $0{,}1 \times 2^{22}$ mm $= 419\,430{,}4$ mm, soit 419 m environ.
Il suffit de 22 pliages pour obtenir une pile de papier plus haute que la tour Eiffel.
2. Ceci n'est pas réalisable, car la pile de papier devient rapidement trop épaisse pour être repliée en 2…

81 1.

Temps (en s)	1	2	5	10
Distance (en m)	4,905	19,62	122,625	490,5

2. La distance n'est pas proportionnelle au temps, car les quotients $\frac{4{,}905}{1}$ et $\frac{19{,}62}{2}$ ne sont pas égaux.
3. Un parachutiste met 20,2 s environ pour parcourir 2 000 m.

82 1. $26^6 \times 10^2 \approx 3 \times 10^{10}$, donc il y a plus de 30 milliards de mots de passe possibles.
2. $(3 \times 10^{10}) : (1{,}5 \times 10^2) = 2 \times 10^8$, donc il faut environ 200 000 000 secondes, c'est-à-dire plus de 6 ans, pour tester tous les mots de passe possibles.

83 1. et 2. $8^3 = 512$ et $5 + 1 + 2 = 8$.
$17^3 = 4\,913$ et $4 + 9 + 1 + 3 = 17$.
$26^3 = 17\,576$ et $1 + 7 + 5 + 7 + 6 = 26$.
$27^3 = 19\,683$ et $1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$.
3. On remarque que la somme des chiffres est égale au nombre de départ.
4. « Certains nombres sont égaux à la somme des chiffres composant leur cube. »
5. Si l'on teste cette propriété au hasard, on a peu de chance de trouver un tel nombre.
Exemple : $15^3 = 3\,375$ et $3 + 3 + 7 + 5 = 18 \neq 15$.

84 1. $A = 13$ $B = 13$ $C = 85$ $D = 85$ $E = 781$ $F = 781$
2. $G = 1 + 8^1 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + 8^5 + 8^6 + 8^7 = \frac{1-8^8}{1-8}$.

85 384 400 km $= 3{,}844 \times 10^5$ km $= 3{,}844 \times 10^8$ m.
2,33 mm $= 2{,}33 \times 10^0$ mm $= 2{,}33 \times 10^{-3}$ m.
$(3{,}844 \times 10^8) : (2{,}33 \times 10^{-3}) \approx 10^{11}$, il faudrait donc empiler 10^{11} pièces de 1 € pour aller de la Terre à la Lune.

86 Une allumette mesure environ 5 cm.
5×10^9 cm $= 5 \times 10^4$ km $= 50\,000$ km.
Le tour de la Terre est d'environ 40 000 km, donc c'est vrai.

87 1. 180 tonnes $= 180 \times 10^3$ kg par jour.
180×10^3 kg : $50 = 3\,600$ sacs par jour.
2. Production annuelle : $300 \times 180 \times 10^3 = 5{,}4 \times 10^7$ kg par an.

$5{,}4 \times 10^7 : (8 \times 10^{-4}) = 6{,}75 \times 10^{10}$ cm^3 $= 6{,}75 \times 10^4$ m^3.

88 1 km^3 $= 10^{12}$ L et 1 mg $= 10^{-9}$ tonne.
$1{,}320 \times 10^6 \times 10^{12} \times 0{,}000\,005 \times 10^{-9} = 6{,}6 \times 10^3$ tonnes.
Donc les océans et les mers renferment environ $6{,}6 \times 10^3$ tonnes d'or (6 600 tonnes).

Dans les autres matières

89 **1.** $(1{,}5 \times 10^8) : (3 \times 10^5) = 500$, donc la lumière met 500 secondes, c'est-à-dire 8 min 20 s, pour parcourir la distance du Soleil à la Terre.
2. Il y a 60 secondes par minute, 60 minutes par heure, 24 heures par jour, 365 jours par an donc, en une année, la lumière parcourt : $3 \times 10^5 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365$ km soit environ $9{,}46 \times 10^{12}$ km ou encore environ 9 460 milliards de kilomètres.

90 Homme : environ 5,5 L correspond à 5,5 dm^3.
5,5 dm^3 $= 5{,}5 \times 10^9$ mm^3
et $5{,}5 \times 10^9 \times 5 \times 10^6 = 2{,}75 \times 10^{16}$ globules rouges dans le corps.
Femme : environ 4,5 L correspond à 4,5 dm^3.
4,5 dm^3 $= 4{,}5 \times 10^9$ mm^3
et $4{,}5 \times 10^9 \times 5 \times 10^6 = 2{,}25 \times 10^{16}$ globules rouges dans le corps.
Enfant : environ 3 L correspond à 3 dm^3.
3 dm^3 $= 3 \times 10^9$ mm^3
et $3 \times 10^9 \times 5 \times 10^6 = 1{,}5 \times 10^{16}$ globules rouges dans le corps.

91 $1{,}4 \times 10^{10}$ ans : Big Bang.
$4{,}5 \times 10^9$ ans : formation de la Terre.
$5{,}5 \times 10^8$ ans : premiers poissons.
$2{,}3 \times 10^8$ ans : premiers dinosaures.
$6{,}5 \times 10^7$ ans : disparition des dinosaures.
3×10^6 ans : les premiers hommes.
$5{,}5 \times 10^3$ ans : premières écritures.

92 $5^6 + 3^4 + 2^1 = 15\,708$.

Jeux mathématiques

93 **1.** $3^4 = 81$, donc il y aura 81 feuilles le cinquième jour.
2. $3^9 = 19\,683$, donc il y aura 19 683 feuilles le dixième jour.

94 3 solutions : (2 ; 6), (22 ; 1) et (1 ; 29).

95 Il y a 3 solutions.

		20	5	11	25			3	22	14	2					
		16			24			6			23					
18	7	9			1	8	17	19			13	12	4	21	15	10

		20	5	11	25			10	15	21	4					
		16			24			6			12					
18	7	9			1	8	17	19			13	23	2	14	22	3

		20	5	11	25			10	15	21	4					
		16			24			6			12					
18	7	9			1	8	17	19			13	3	22	14	2	23

96 Les puissances de 3 se terminent respectivement par un 3 ou 9 ou 7 ou 1 (dans cet ordre).
3^{2017} se termine par 3.

97 Il y a 3 solutions : $121 = 11^2$, $484 = 22^2$ et $676 = 26^2$.

Devoirs à la maison

98 $17 \times 10^{31} : 10^{11} \times 3 = 5{,}1 \times 10^{21}$, donc il faudrait $5{,}1 \times 10^{21}$ min à *Deep Blue* pour étudier toutes les manières de jouer les dix premiers coups. Ce qui correspond à environ 10^{15} années…

99 **1.**

Planète	Distance (en ua)
Mercure	0,38
Vénus	0,72
Terre	1
Mars	1,52
Jupiter	5,20
Saturne	9,54
Uranus	19,17
Neptune	30,11

2. a., **b.** et **c.** Pour $n = -1 : D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^{-1} = 0{,}5$;
-1 est associé avec Mercure.
Pour $n = 0 : D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^0 = 0{,}7$;
0 est associé avec Vénus.
Pour $n = 1 : D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^1 = 1$;
1 est associé avec la Terre.
Pour $n = 2 : D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^2 = 1{,}6$;
2 est associé avec Mars.
Pour $n = 3 : D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^3 = 2{,}8$.
Pour $n = 4 : D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^4 = 5{,}2$;
4 est associé avec Jupiter.
Pour $n = 5 : D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^5 = 10$;
5 est associé avec Saturne.
Pour $n = 6 : D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^6 = 19{,}6$;
6 est associé avec Uranus.
Pour $n = 7 : D = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^7 = 38{,}8$;
7 est associé avec Neptune.

Avec un logiciel

Activité 1. Puissance sur calculatrice et sur tableur

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Cette activité utilisant à la fois une calculatrice et un tableur propose d'étudier les différentes façons de calculer la puissance d'un nombre avec ces deux outils. En mathématiques,

elle permet de travailler et de développer la maitrise de la notion de puissance.

Plusieurs compétences « tableur » du programme de 4e sont développées dans cette activité (saisir et recopier une formule ou une fonction dans une feuille de calcul). La plus-value apportée par le tableur est de pouvoir automatiser les calculs et de permettre le calcul de plusieurs puissances.

En pratique, cette activité est assez facile et ne nécessite pas de connaissance particulière des outils logiciels. Sa mise en œuvre peut être facilitée et possible pour des élèves « débutant en tableur » avec l'utilisation des fiches méthodes permettant un travail autonome de l'élève (fiche tableur 1, 2 et 6).

• Correction

1. Thomas va appuyer sur 24 touches. En effet, il va faire : « $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$ » pour obtenir $5^{11} = 48\,828\,125$.

2. Thomas va appuyer sur 5 touches. En effet, il va faire : « 5 ^ 1 1 = » pour obtenir $5^{11} = 48\,828\,125$.

3. a. et **b.** À vérifier sur l'écran de l'élève.

c. Le nombre 5^{11} apparaît dans la cellule A11.

4.

	A	B	C	D	E
1	5		nombre	exposant	
2	25		5	11	48 828 125
3	125				48 828 125
4	625				
5	3 125				
6	15 625				
7	78 125				
8	390 625				
9	1 953 125				
10	9 765 625				
11	48 828 125				
12	244 140 625				
13	1 220 703 125				
14	6 103 515 625				
15	30 517 578 125				
16	152 587 890 625				

Un fichier tableur complet est disponible sur le site.

Activité 2. Contrat de travail

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité ouverte invite les élèves à utiliser le tableur pour calculer et comparer des salaires. À la première lecture de l'énoncé, les élèves peuvent penser que le contrat numéro 2 est farfelu et peu intéressant pour l'employé, mais rapidement, en utilisant le tableur pour comparer le cumul des salaires sur plus de 15 jours de travail, ils se rendent comptent de la croissance rapide des salaires dans ce contrat.

En pratique, les compétences techniques tableur sont assez simples et l'organisation de la feuille de calcul peut être variable. Cependant, les calculs des cumuls de salaire pourront donner lieu à quelques hésitations dans la programmation des élèves.

• Correction

	A	B	C	D	E
1	jour	salaire contrat n°1	Cumul	salaire contrat n°2	cumul
2	1	70,00 €	70,00 €	0,01 €	0,01 €
3	2	70,00 €	140,00 €	0,02 €	0,03 €
4	3	70,00 €	210,00 €	0,04 €	0,07 €
5	4	70,00 €	280,00 €	0,08 €	0,15 €
6	5	70,00 €	350,00 €	0,16 €	0,31 €
7	6	70,00 €	420,00 €	0,32 €	0,63 €
8	7	70,00 €	490,00 €	0,64 €	1,27 €
9	8	70,00 €	560,00 €	1,28 €	2,55 €
10	9	70,00 €	630,00 €	2,56 €	5,11 €
11	10	70,00 €	700,00 €	5,12 €	10,23 €
12	11	70,00 €	770,00 €	10,24 €	20,47 €
13	12	70,00 €	840,00 €	20,48 €	40,95 €
14	13	70,00 €	910,00 €	40,96 €	81,91 €
15	14	70,00 €	980,00 €	81,92 €	163,83 €
16	15	70,00 €	1 050,00 €	163,84 €	327,67 €
17	16	70,00 €	1 120,00 €	327,68 €	655,35 €
18	17	70,00 €	1 190,00 €	655,36 €	1 310,71 €
19	18	70,00 €	1 260,00 €	1 310,72 €	2 621,43 €
20	19	70,00 €	1 330,00 €	2 621,44 €	5 242,87 €
21	20	70,00 €	1 400,00 €	5 242,88 €	10 485,75 €
22	21	70,00 €	1 470,00 €	10 485,76 €	20 971,51 €

Activité 3. Langage binaire des ordinateurs

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité utilisant un tableur propose l'étude du langage binaire (ce langage est notamment utilisé en informatique). Elle permet de travailler et de développer plusieurs compétences mathématiques (décomposition d'un nombre en produit, étude d'un système de numération) et plusieurs compétences « tableur » du programme de 4e (saisir et recopier une formule ou une fonction dans une feuille de calcul) dans le contexte d'une activité liée à la notion de puissance.

Elle permet de présenter le langage binaire, langage numérique peu connu des élèves mais intéressant dans le domaine scientifique et technologique. La plus-value apportée par le tableur est de pouvoir transformer rapidement un nombre entier en écriture binaire et réciproquement.

Cette activité plus complète que les deux précédentes s'adresse à des élèves ayant déjà rencontré ou manipulé un tableur, mais sa mise en œuvre peut être facilitée et éventuellement possible avec des élèves « débutant en tableur » par l'utilisation des fiches méthodes permettant un travail autonome de l'élève (fiches tableur 1, 2 et 6).

En outre, on pourra éventuellement, avant de débuter cette activité, étudier « sur papier » l'écriture en mode binaire de certains nombres entiers pour permettre aux élèves de mieux comprendre le format des écritures binaires. L'usage de la calculatrice peut alors s'avérer judicieux.

• Correction

1., **2.**, **3.**, et **4.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	128	64	32	16	8	4	2	1	
2	1	0	0	0	1	0	0	1	
3	128	0	0	0	8	0	0	1	137

5. La valeur décimale de l'octet 10101010 est 170.

6. La valeur décimale de l'octet 10001001 est 137.

7. Avec un octet, on peut coder $2^8 = 256$ nombres différents.

Activité 4. Un algorithme puissant

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet aux élèves de programmer sur Scratch le calcul de puissances d'un nombre.

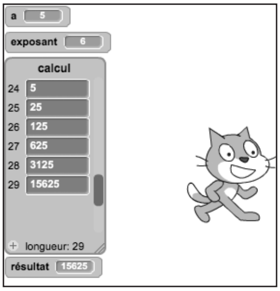
L'utilisation de plusieurs variables est ici intéressante, et même si le début de la programmation est guidé par la copie d'écran présente dans l'énoncé, la réflexion et l'organisation de la programmation de l'élève sera réelle pour réussir le calcul attendu.

Ceci permettra également de percevoir si l'élève a bien compris le sens de la puissance d'un nombre.

Dans un second temps, l'activité propose de chercher des puissances de nombres les plus proches possibles de certains résultats donnés. Ceci permettra d'utiliser judicieusement le programme.

• Correction

1. Exemple pour le calcul de $5^6 = 15\,625$



2. a. $8^3 = 2^9 = 512$ donc 2 et 8 sont les nombres (compris entre 1 et 9) ayant une puissance la plus proche de 512.

b. $3^9 = 19\,683$ est la puissance la plus proche de 20 000.

■ Tâches complexes

1. De puissants grains de sable

Le volume de la dune du Pyla est d'environ 60 millions de m^3 :

$60 \times 10^6 \times 10^3$ L $= 6 \times 10^{10}$ L.

Et $6 \times 10^{10} : (130 \times 10^{-12}) \approx 5 \times 10^{20}$: un ordre de grandeur du nombre de grains de sable dans la dune du Pyla est donc 5×10^{20}.

Puis $5 \times 10^{20} : 3 \times 10 \times 10^{-6} \approx 1{,}7 \times 10^{15}$ g, soit $1{,}7 \times 10^{12}$ kg ou encore $1{,}7 \times 10^9$ tonnes.

Un ordre de grandeur de la masse de la dune du Pyla est donc $1{,}7 \times 10^9$ tonnes.

2. Les problèmes DUDU

Ce problème issu de la légende du jeu d'échec utilise les puissances de 2.

Le nombre de pièces de la dernière case est de 2^{63} soit environ $9{,}2 \times 10^{18}$ pièces de 1 centime soit $9{,}2 \times 10^{15}$ euros, ce qui représente plus de 9 millions de milliards d'euros.

Le diamètre d'une pièce de 1 centime étant de 16,25 mm, on obtient une surface de $9{,}2 \times 10^{18} \times \pi \times \left(\frac{16{,}25}{2}\right)^2$ mm^2, soit plus de 1,9 milliard de km^2, ce qui est bien plus grand que la France.

chapitre 4

Calcul littéral

I. Le programme

Thème A – Nombre et calculs

Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maitrise des procédures de calcul. Les différentes composantes de ce thème sont reliées entre elles. Les élèves manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils prennent conscience du fait qu'un même nombre peut avoir plusieurs écritures (notamment écritures fractionnaire et décimale). Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour résoudre des problèmes faisant intervenir des équations ou inéquations du premier degré. À l'occasion d'activités de recherche, ils peuvent rencontrer la notion de nombres irrationnels, par exemple lors d'un travail sur les racines carrées.

Attendu de fin de cycle

- Utiliser le calcul littéral.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser le calcul littéral	
■ **Mettre un problème en équation en vue de sa résolution.** ■ **Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples.** ■ **Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré.** ■ **Notions de variable, d'inconnue.** ■ **Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.**	■ Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines). ■ Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d'équation. ■ Étudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par exemple, en factorisant des équations produits simples à l'aide d'identités remarquables). ■ Montrer des résultats généraux, par exemple que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3.

** En **gras** : ce qui est traité dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

En 5^e, les élèves ont étudié les propriétés des opérations (priorités, parenthèses) dans le chapitre 1 du manuel Myriade 5^e. Dans le chapitre 4 du manuel de 5^e, ils ont aussi appris à utiliser et produire des formules pour généraliser des procédures de calcul.
Enfin, ils ont pu travailler le sens de l'égalité et faire évoluer le statut du signe = à travers le test d'égalité.
L'objectif de ce chapitre est de prolonger le travail amorcé en 5^e :
– produire et utiliser des expressions y compris avec des nombres négatifs ;
– formaliser la distributivité et l'utiliser comme l'outil principal de transformation des expressions algébriques ;
– faire le lien avec la rationalité mathématique (un contre-exemple suffit pour dire qu'une affirmation est fausse. De nombreux exemples ne sont pas suffisants pour prouver qu'une affirmation est toujours vraie). De fait, il s'agira de faire apparaitre l'algèbre comme un outil de preuve.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Exprimer en fonction de x ■ Vidéo « *Je comprends* » : Développer une expression (niveau 1) ■ Vidéo « *Je comprends* » : Prouver une égalité
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Tableur ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU et le questionnaire

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Utiliser une expression littérale

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'objectif de cette activité est d'utiliser des expressions littérales en remplaçant les lettres par des nombres négatifs.

Les variables didactiques ont été choisies pour que :

– la substitution se fasse avec des nombres négatifs ;

– les élèves qui classeraient les températures sans les convertir ne trouvent pas la bonne réponse (questions **1.** et **3**).

• *Correction*

1.

°F	°C
14 °F	–10 °C
–41,8 °F	–41 °C
–4 °F	–20 °C
–25 °F	≈ –31,7°C

2. 0 °C, un blouson.

3.

°F	°C
–50,8 °F	–46 °C
–49 °F	–45 °C
53,6 °F	12 °C
50 °F	10 °C
41 °F	5 °C

Activité 2. Découvrir la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

La distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction est utilisée en acte depuis le CE2 mais n'a pas encore été formalisée, étudiée en tant qu'objet. C'est l'objectif de cette activité.

En partant du registre numérique, l'objectif est d'identifier une égalité entre deux expressions, puis de traduire cette propriété en utilisant l'algèbre comme un outil de généralisation. Cette propriété sera admise (validée par le professeur).

• *Correction*

1. $8\times3+8\times7=80$; $(7-3)\times8=32$; $3{,}5\times(5-1{,}4)=12{,}6$; $8\times7+3=59$; $3{,}5\times5-1{,}4\times5=10{,}5$; $8+(3\times7)=29$. $5\times3{,}5-3{,}5\times1{,}4=12{,}6$; $(3{,}5-1{,}4)\times5=10{,}5$. $8+3\times8+7=39$. $7\times8-3\times8=32$; $5\times3{,}5-1{,}4=16{,}1$; $3\times8-7\times8=-32$; $8\times(3+7)=80$; $7-3\times8=-17$; $7+8\times3=31$.

2. a. $17\times4+17\times18$.

b. $2{,}3\times(6+2)$.

c. $14\times2-3\times2$.

d. $3\times(9-3)$.

3. À vérifier dans le cahier de l'élève.

4. $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ et $a\times(b-c)=a\times b-a\times c$.

Activité 3. Réduire une expression littérale

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

La réduction d'expression est présentée en lien avec l'égalité entre deux expressions : une expression réduite d'une expression A est une expression B qui est toujours égale à A. Les preuves qui sont attendues doivent s'appuyer sur la distributivité, la commutativité et l'associativité des opérations. Enfin, les expressions présentes aux questions **1** et **2** ont été choisies pour que les erreurs classiques soient étudiées.

• *Correction*

1. $1{,}5x \times 4x = 1{,}5 \times 4 \times x \times x = 6x^2$;
$1{,}5x + 4x = x \times (1{,}5 + 4) = 5{,}5x$.
Les autres égalités d'expressions seront invalidées par production d'un contre-exemple (en prenant $x = 10$ par exemple).

2. a. Impossible car la multiplication est prioritaire sur la multiplication. La proposition $7x$ sera invalidée par contre-exemple.
b. $-1x$ que l'on pourra écrire $-x$.
c. $5{,}5x^2$
d. $12x$
e. Impossible, $x \times (3 + 4x)$ ne peut pas se réduire.
f. $-12x$
g. $12x^3$
h. $-1 + x$

3.a. $a - (b + c) = a - b + c$ faux,
contre-exemple : $a = 10 ; b = 2 ; c = 3$.
$a - (b + c) = a - 1 \times (b + c) = a - 1 \times b - 1 \times c = a - b - c$,
c'est toujours vrai.
b. $a + (b + c) = a + 1 \times (b + c) = a + 1 \times b + 1 \times c = a + b + c$.

4. a. $3x - (5 + 2x) = 3x - 5 - 2x = x - 5$;
b. $3x + (5 + 2x) = 3x + 5 + 2x = 5x + 5$;
c. $3x - (5 - 2x) = 3x - 5 + 2x = 5x - 5$;
d. $3x + (5 - 2x) = 3x + 5 - 2x = x + 5$;
e. $3x - (5 + 2x) \times 2 = 3x - (10 + 4x)$
$= 3x - 10 - 4x = -x - 10$;
f. $3x + (5 + 2x) \times 2 = 3x + (10 + 4x)$
$= 3x + 10 + 4x = 7x + 10$.

Activité 4. Prouver ou réfuter une égalité entre deux expressions algébriques

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'objectif de cette activité est de montrer que l'algèbre est un outil de preuve et que la réduction d'expression est un moyen efficace pour prouver une égalité entre deux expressions.

• *Correction*

1. 136.
2. À vérifier dans le cahier de l'élève.
3. Vrai :

a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$

$4 \times (2a + 3b) = a + b + (a + b)$
$+ (a + 2b) + (2a + 3b) + (3a + 5b)$.
En effet : $4 \times (2a + 3b) = 8a + 12b$ et
$a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) + (3a + 5b) = 8a + 12b$.

■ Objectif 1. Produire et utiliser une expression littérale

Je m'entraine

1 **a.** –4 ; **b.** –3 ; **c.** 4 ; **d.** –4 ; **e.** –8 ; **f.** 6.

2 **a.** Périmètre de ABEF ; **b.** Aire de ACDF ; **c.** Côté AC ; **d.** Aire de BCDE ; **e.** Périmètre de BCDE ; **f.** Aire de ACDF ; **g.** Périmètre de ACDF .

3 **a.** 22 ; **b.** 52 ; **c.** $\frac{8}{3}$.

4 **a.** –42 ; **b.** –90 ; **c.** $\frac{-18}{49}$.

5 **a.** –10 ; **b.** 11.

6 **a.** 16 ; **b.** 2,25.

7 $xy + 5y$ ou $(5 + x) \times y$.

8

• Choisir un nombre
• Ajouter 8
• Multiplier par 2

• Choisir un nombre
• Multiplier par 2
• Ajouter 8

• Choisir un nombre
• Lui ajouter le produit de 8 par 2

$2x + 8$

$x + 8 \times 2$

$2(x + 8)$

Je résous des problèmes simples

9 **1.** 7,05.
2. Oui, niveau atteint : 11,34 m.

10 **1. a.** 40 ; **b.** 24.
2. Multiplier le nombre de carreaux sur le côté par 4.
Enlever 4 au nombre de carreaux sur le côté et multiplier le résultat par 4.
Ajouter les deux résultats.
3. On nomme N le nombre de carreaux sur le côté : $N \times 4 + (N - 4) \times 4$.
Remarque : toute expression se ramenant à $8N - 16$ est valable.

11 **1.**

x	0	–5	12	4,8
$-x^2 \leqslant -x + 1$	1	–19	–155	–26,84

2. Non

12 **a.** Non, contre-exemple : $a = 3$, $b = 1$.
b. Oui, on peut utiliser la commutativité et l'associativité pour la preuve.
c. Oui, on peut reprendre les techniques vues en 5e (si la distributivité n'a pas encore été formalisée).
d. Non, contre-exemple $x = 0$.

13 **2.** Soit x la longueur du pied : $1{,}5 \times (x + 1)$.
3. =(B1+1)*1.5

14 **1.** $\frac{6\,400}{3}\pi \approx 6\,702 \text{ cm}^3$.
3. Non, on ne peut y mettre que 6,7 L.

■ Objectif 2. Connaitre la distributivité ; développer, factoriser et réduire une expression

Je m'entraine

15 **a.** 1 717 ; **b.** 500 ; **c.** 1 287 ; **d.** 54 ; **e.** 14 028 ; **f.** 190 ; **g.** 2 156 ; **h.** 1 300.

16 **a.** 48 ; **b.** 27 ; **c.** 26 ; **d.** 55 ; **e.** 30 ; **f.** 400.

17 **a.** $10x+15$; **b.** Impossible ou alors on acceptera : $5+1\times(2x+3)=5+1\times 2x+1\times 3$;
c. $15+6x$; **d.** $20x-8$; **e.** Impossible ; **f.** $12x+8$.

18 **a.** $127\times(57+43)=12\,700$; **b.** $14\times(3{,}5+6{,}5)=140$;
c. $13\times(2{,}6-0{,}6)=26$; **d.** $29\times(201-1)=5\,800$.

19 **a.** $3\times(x+7)$; **b.** $y\times(9+y)$; **c.** $x^2\times(2{,}5-0{,}3)$;
d. $3\times(3-4N)$; **e.** Impossible ; **f.** $x\times(1-x)$.

20 **a.** $7n+1$; **b.** $27+2x$; **c.** $-7k-40$;
d. $6m-1$; **e.** $-3t+1$; **f.** $40x+19$.

21 **a.** $15x$; **b.** déjà réduit ; **c.** $-2x$; **d.** déjà réduit ;
e. $15x^3$; **f.** $x\leqslant+x+8$; **g.** $8x^2$; **h.** $2x$; **i.** $-15x$.

22 **a.** $0{,}48x$; **b.** déjà réduit ; **c.** $2{,}2x$;
d. déjà réduit ; **e.** $0{,}48x^3$; **f.** $x\leqslant+x+2{,}6$.

23 **a.** $\frac{23}{12}x$; **b.** $\frac{5}{6}x\leqslant$; **c.** $\frac{-7}{12}x$;
d. déjà réduit ; **e.** $\frac{5}{6}x^3$; **f.** $\frac{4}{9}x^2$.

24 **a.** $x+7$; **b.** $-9+2x$; **c.** $13-4x$;
d. $12+9x$; **e.** $-8x-1$.

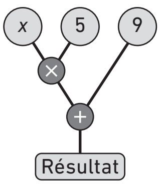
Je résous des problèmes simples

25 $2x^2\times(2-6x)$; $-2x^2\times(-2+6x)$; $4x^2\times(1-3x)$;
$x\times(4x-12x^2)$; $4\times(x^2-3x^3)$.

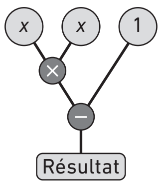
26 **a.** $10x=123{,}84$; **b.** $100x+1=-469$.

27 **1.**

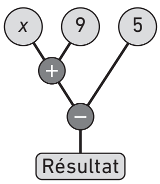
a.



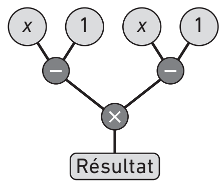
c.



b.



d.



2. **a.** et **c.** Somme ; **b.** et **d.** Produit

28 **a.** et **d.** : Somme ; **b.** et **c.** : Produit.

29

$6x+12$	$7x+5-(x-7)$
$x+5(x+2)+2$	$2(2+3x)$
$6x+4$	$5x+7$
$3(2x+4)$	$6(x+2)$

30 Deux solutions parmi de très nombreuses possibles :
$5\times(3+16+2)-2=103$ minutes ;
$5\times(3+16)+4\times 2$;
$5\times 3+5\times 16+4\times 2$.

31 **1.** 5 328 €.
2. $168\times 1{,}2\times 5+1200\times 1{,}2\times 3$ ou $(168\times 5+1200\times 3)\times 1{,}2$.

32 $5x-11$; **b.** $2x\leqslant+x$; **c.** $-8+2x$;
d. $30x+4$; **e.** $2x\leqslant+11x+12$.

■ Objectif 3. Prouver ou réfuter une égalité entre deux expressions

Je m'entraine

33 **a.** Faux ; **b.** Faux ; **c.** Faux ; **d.** Faux ; **e.** Vrai ; **f.** Vrai.

34 Celle de Joseph.

35 Oui, les deux expressions sont égales à $8x^2-4x$.

36 Faux, $5\times 11=55$ et non 51.

37 Vrai, $9N=10N-N$.

38 **1.** Sorana a raison.
2. Faux, contre-exemple pour le nombre 10.

39 **1.** Jayan a raison.
2. $((N\times 0{,}4)+1{,}8)\times 5-2N=9$.

40 Toutes ces formules sont égales.

Je résous des problèmes simples

41 **2.** Programme 1 : $(x^2+35)\times x^2+24$
et Programme 2 : $(x^2+5)\times 10x$.
3. Faux, pour $x=0$, Programme 1 donne 4 et Programme 2 donne 0.

42 **1.** En prenant 4 pour nombre de départ, les deux algorithmes donnent 26 pour résultat.
2. $(4x-3)\times 2$ et $(5x+2)\times 2-(x+5)\times 2$ donnent $8x-6$.
3. Choisir un nombre, le multiplier par 8, soustraire 6 au résultat.

43 Vrai, $2x+4+5x$ et $7x-11+15$ donnent $7x+4$ pour résultat.

44 **1.** En prenant 0, on obtient 33.

2. Vrai, en 1ère ligne, on a : 5 ; x ; $8-x$ et 4.
Résultat 33, quel que soit x.

45 – Casserole deux fois plus haute : l'affirmation est vraie car on aura $\pi R \leqslant H$ et $\pi R \leqslant \times 2H = 2\times \pi R \leqslant H$.
– Casserole au rayon deux fois plus grand : affirmation fausse, contre-exemple : $R = 5$ et $H = 10$.

46 **P1**. Les deux rectangles auront toujours la même aire : $3x \leqslant +21x$.
P2. Ils n'auront pas le même périmètre : contre-exemple $x = 4$.

Je travaille seul(e)

47 A **48** B **49** C **50** C **51** A

52 **a.** $AB = 4x$; **b.** $AB = x+15$; **c.** $AB = x-7$; **d.** $AB = 24-x$.

53 **a.** $(3\times4+1)(6-4) = 13\times2 = 26$;
b. $(3\times(-2)+1)(6-(-2)) = (-6+1)(6+2) = -40$;
c. $\left(3\times\frac{5}{6}+1\right)\left(6-\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{2}+\frac{2}{2}\right)\left(\frac{36}{6}-\frac{5}{6}\right) = \frac{7}{2}\times\frac{31}{6} = \frac{217}{12}$.

54 **a.** $-3^2+2\times7 = -9+14 = 5$;
$-(-3) \leqslant +2\times(-8) = -9+(-16) = -25$.

55 **1.** =3*A2^2-5*A2+1 ; **2.** B2=51 ; B3= 69 ; B4=0,68.

56 $5y-xy$ ou $(5-x)\times y$.

57 **1.** $Ec = \frac{1}{2}\times90\times10 = 450$ joules.
2. $1{,}5\,T = 1500$ Kg et 110 km/h signifie 110 km en 1 h donc 110 000 m en 3 600 s, c'est-à-dire environ 30,6 m/s.
Donc $Ec = \frac{1}{2}\times1500\times30{,}6 = 22\,950$ joules.

58 **a.** $100\times15+3\times15 = 1\,545$; **b.** $20\times1\,000-20 = 19\,980$;
c. $20\times14+14 = 294$; **d.** $20\times4-40 = 760$;
e. $100\times15-2\times15 = 1\,470$; **f.** $10\times13+13 = 143$.

59 **a.** $(36+65)\times7 = 700$; **b.** $23\times(7+3) = 230$;
c. $2\times(2{,}8+0{,}2) = 6$; **d.** $13\times(22-2) = 260$;
e. $5\times(13-3) = 50$; **f.** $15{,}7\times(15-13) = 31{,}4$.

60 Sommes : **a** ; **e**. Produits : **b** ; **c** ; **d** ; **f**.

61 Pour développer une expression, il faut que ce soit un produit dont l'un des deux facteurs est une somme.
a. Impossible, aucun des deux facteurs n'est une somme.
b. $5\times x\times8-2\times8$, les deux termes de la somme sont $5\times x$ et -2.
c. $6\times2+4\times x\times2$, les deux termes de la somme sont 6 et $4\times x$.
d. Impossible, ce n'est pas un produit.
e. $7\times x+7\times1$, les deux termes de la somme sont x et 1.
f. $8\times(2x+2)\times3 = 8\times3\times(2x+2) = 24\times(2x+2)$
$= 48x+48$.

Remarque : on peut aussi appliquer la distributivité à $8\times(2x+2) = 16x+16$, puis à $(16x+16)\times3 = 48x+48$.

62 **a.** $y\times(5+3)$; **b.** Impossible, pas de facteur commun.
$x\times(1+4)+3 = 5x+3$;
c. $7\times(x+3)$; **d.** $2\times(2x^2-3x+1)$.

63 **a.** On peut développer $+2\times(x-3) = +2x-6$ donc $8+2\times(x-3) = 8+2x-6$.
b. $5x\times2x-5x\times6 = 10x^2-30x$;
c. $-4\times2-3x\times2 = -8-6x$;
d. $-3\times4+(-3)\times(-x^2) = -12+3x^2$.
On peut développer $-3(4x-7) = -12x+21$ donc :
$$10x-3(4x-7)+9 = 10x-12x+21+9.$$
f. On peut développer $(4x^2-3)\times2 = 8x^2-6$, on a donc : $(4x^2-3)\times2+4x = 8x^2-6+4x$.

64 **a.** $2n+(n-5) = 2n+n-5 = 3n-5$;
b. $8k-(10k+12) = 8k-10k-12 = -2k-12$;
c. $27+8+2x = 35+2x$;
d. $10m+2-m-7 = 9m-5$;
e. $-3t+2-t = -4t+2$.

65 **a.** Faux pour $x = 5$.
b. Vrai c'est une propriété de l'addition.
c. Vrai, $x+3+\ x+5 = x+\ x+3+5 = 2x+8$.
d. Faux, pour $x = 10$.
e. Vrai, $(x+3)-(x+3) = x+3-x-3 = 0$.
f. Faux pour $x = 3$.

66 Vrai ; soit y et x ces deux nombres :
$(2\times y)\times\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2xy}{2} = xy$.

67 Tous les élèves trouvent les bonnes réponses : 12 et 20.
– Léa : $(B+B)\times2+4 = 2B\times2+4 = 4B+4$;
– Jérémie : $(B+2)\times2+B\times2 = 2B+4+2B = 4B+4$;
– Hamid : $4B+4$;
– Inès : $(B+2)\times4-4 = 4B+8-4 = 4B+4$;
– Khadija : $4+(B\times2)\times2 = 4+4B$.
Toutes ces formules sont égales.

68 **1.** On trouve à chaque fois le même résultat avec les deux programmes.
2. Vrai, Programme N° 1 : $(N+3)\times8$,
Programme N° 2 : $(N\times2+6)\times4$.
Et $(N+3)\times8 = 8N+24$, $(N\times2+6)\times4 = 8N+24$.
Les deux programmes donneront toujours le même résultat final.
4. Choisir un nombre, le multiplier par 8 et ajouter 24 au résultat.

Je résous des problèmes

69 **1.** 355 305 cm³ environ.
2. $2\pi^2\times r^2\times(2R) = 2\times(2\pi^2\times r^2\times R)$, le volume double.
3. $2\pi^2\times(2r)^2\times R = 2\pi^2\times4r^2\times R = 4\times(2\pi^2\times r^2\times R)$, le volume est quatre fois plus grand.

70 **1.** Il faut mettre 24 et 53 au centre et 7 et 19 sur les côtés, on obtient alors 257 au sommet.
En nommant a, b, c, d les quatre nombres à la base, on obtient $a + 3b + 3c + d$ au sommet.
Il faut donc mettre les nombres les plus grands au centre et les plus petits sur les côtés.
2. Par exemple : 20 et 30 au centre et 10 et 90 sur les côtés.

71 Non, contre-exemple $x = 10$ et $5 \times (2x \times 4) = 40x$.

72 $x - y = 10$ donc $5 \times (x - y) = 50$.

73 **1.** Oui, $4 + 5 + 6 = 15$.
On ne peut pas obtenir 13 : $3 + 4 + 5 = 12$ trop petit et $4 + 5 + 6 = 15$, trop grand.
2. Vrai : $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$.

74 **a.** $300x$; **b.** $200a$; **c.** $40a$; **d.** $200s$.

75 **1.** $AB + BC = \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = 4\pi$ et $AC = \frac{8\pi}{2} = 4\pi$.
2. Les deux longueurs seront égales car :
$AB + BC = \pi \times \frac{D1}{2} + \pi \times \frac{D2}{2}$ et $AC = \pi \times \frac{D1 + D2}{2}$.

76 **1.** 22.
2. $(x + 5) \times 2 - 8$.
3. $2x + 2$.
Choisir un nombre, le multiplier par 2, ajouter 2 au résultat.

77 N° 1 : Non.
N° 2 : Non.
N° 3 : Oui.
N° 4 : Non.

78 $(3 + x)(x + 2)$; $x^2 + 3x + 2x + 3 \times 2$;
$x \times (x + 2) + 3 \times (x + 2)$; $x \leqslant +3x + 2x + 6$;
$x \times (x + 3) + 2 \times (x + 3)$.

79 $P + Q + R = b - (2c + 10) + (2c - a) + (a - (b - 10))$
$= b - 2c - 10 + 2c - a + a - b + 10 = 0$.

80 Toute expression se ramenant à $12x - 16$.

81

a	$a + 14$	b	$a + 3$
$b - 2$	$a + 5$	$a + 6$	$a + 8$
$a + 7$	$b - 4$	$a + 10$	$a + 4$
$a + 12$	$a + 2$	$a + 1$	$b + 2$

82 **1.** Vrai : périmètre du grand cercle: $2\pi R$; périmètre du petit cercle: $2\pi \frac{R}{2} = \frac{2\pi R}{2}$.
2. Faux : contre-exemple, $R = 5$.

Dans les autres matières

83 **1.** $P = 0{,}14 \times 150^2 \times 12^3 = 5\ 443\ 200$ W.

2. $\frac{62\ 400 \times 1\ 000\ 000}{5\ 443\ 200} \approx 11\ 463{,}8$ donc à peu près 11 464 éoliennes.

84 $4 \times (0{,}25N + 5) - 10 - N = 10$.

85 Voici les développements en pouce :

n\N	30	39	50
14	195,22738	253,79559	325,37896
17	160,77549	209,00813	267,95915
20	136,65917	177,65691	227,76528
23	118,83406	154,48427	198,05676
28	97,613689	126,8978	162,68948

86 Jeu qui se joue en classe.

87 $\frac{1000 \times 1001}{2} = 500\,500$.

88 32 bidons de trois litres.

Devoirs à la maison

89 **1. a.** $6^2 - 5^2 = 11$.
b. $19^2 - 18^2 = 37$.
2. a. $(x + 1)^2 - x^2$.
b. $(40 + 1)^2 - 40^2 = 81$.

90 **1.** 5 kg de poires coutent 10 € de plus que 5 kg de pommes donc Marie a payé le prix de 6 kg de pommes plus 10 €.
2 kg de cerises coutent 6 € de plus que 2 kg de poires donc 10 € de plus que 2 kg de pommes. Maxime a payé le prix de 6 kg de pommes plus 10 €.
2. 3 kg de poires et 2 kg de cerises coutent le prix de 5 kg de pommes plus 16 €.
1 kg de pomme et 4 kg de cerises coutent le prix de 5 kg de pommes plus 20 €, c'est donc plus cher.
3. 3 kg de cerises et 4 kg de poires coutent le prix de 7 kg de pommes plus 23 €.
7 kg de poires et 1 kg de pomme coutent le prix de 8 kg de pommes plus 14 €.
On ne peut pas savoir ce qui est le plus cher puisque l'on ne connait pas le prix d'un kilogramme de pomme.

Avec un logiciel

Activité 1. Feuille de match

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Il est possible de proposer ce problème (questions **4** et **5**) sans donner les questions **1** et **2**. Cela permet de laisser l'initiative de la construction du tableau aux élèves. On peut ensuite faire une petite mise en commun permettant de montrer les différents choix possibles. La question **3** permet de vérifier si des élèves qui ne sont pas familiers avec le rugby ont bien compris toutes les contraintes.

• *Correction*

2. D2 : «=A2*3+B2*7+C2*5».

3. 62 points pour les All Blacks et 13 pour l'équipe de France.

4. Pour les 20 points de la France :

– 4 essais non transformés ;

– 2 essais transformés et 2 pénalités ;

– 2 essais non transformés, 1 pénalité et 1 essai transformé ;

– 5 pénalités et 1 essai non transformé.

Pour les 18 points des All blacks :

– 6 pénalités ;

– 3 essais non transformés et 1 pénalité ;

– 2 pénalités, un essai non transformé et un essai transformé.

5. Seuls les scores égaux à 1, 2 et 4 sont impossibles.

Activité 2. Le magicien

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Il peut être intéressant de jouer réellement au magicien afin de favoriser la résolution du problème. Là encore, il pourrait être pertinent de ne pas proposer les questions **1** et **2** afin de favoriser l'initiative des élèves dans la construction du tableau. Ces questions peuvent servir pour différencier ou servir de bilan intermédiaire en vidéo-projection.

• *Correction*

2. Malik

B2 : «=A2*2»

C2 : «=B2+7»

D2 : «=C2*50»

E2 : «=D2-349»

Élina

B2 : «=(A2*2+7)*50-349

3. L'âge du spectateur est le nombre de centaines du résultat.

$$(2x+7)\times 50-349=100x+350-349=100x+1$$

Activité 3. Le château de cartes

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

La première partie papier/crayon est indispensable pour que les élèves commencent à repérer des régularités dans les calculs ou des processus de calcul. Il est possible que les plus doués arrivent à calculer directement le *N*ième nombre de la suite. Dans ce cas, il pourra être judicieux de les laisser programmer dans Scratch l'algorithme correspondant à leur technique de calcul.

• *Correction*

1. a. 26 cartes.

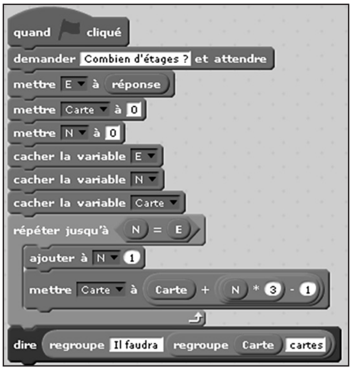
b. 40 cartes.

2. $3\times 6-1=17$ cartes.

3. $3\times x-1$.

Remarque : Il y a de nombreuses façons de compter qui donneront chacune une formule et un programme différents.

4 à **8.**



9. Pour 1 000 étages : 1 500 500 cartes.

10. 155 cartes : 10 étages

11. Impossible, 141 étages trop petit, 142 étages trop grand.

■ Tâches complexes

1. Le prêt immobilier

$225\,000-40\,000=185\,000$ € à emprunter.

– Revenus mensuels : $1750+1550=3\,300$ €.

– Remboursement mensuel maximum (30 % de 3 300 €) : 990 €, soit 11 880 € par an.

• Formule express :

$$A=185\,000\times\frac{0{,}0225}{1-\dfrac{1}{(1+0{,}0225)^{15}}}\approx 13\,448 \text{ € par an.}$$

C'est trop, cette formule n'est pas pour eux.

• Formule Dynamique :

$$A=185\,000\times\frac{0{,}025}{1-\dfrac{1}{(1+0{,}025)^{20}}}\approx 11\,867 \text{ € par an.}$$

C'est possible.

• Formule Confort :

$$A=185\,000\times\frac{0{,}0283}{1-\dfrac{1}{(1+0{,}0283)^{25}}}\approx 10\,423 \text{ € par an.}$$

C'est aussi possible pour eux.

Quelle formule choisir ? Avec la formule Dynamique, ils rembourseront chaque mois 989 € et en 20 ans : $20\times 11867=237\,340$ €.

Le prêt leur coutera donc $237\,340-185\,000=52\,340$ €.

Avec la formule Confort, ils rembourseront chaque mois 869 € et en 25 ans : $25\times 10\,423=260\,575$ €.

Le prêt leur coutera donc $260\,575-185\,000=75\,575$ €.

La formule Confort coute beaucoup plus cher (23 235 € de plus) mais permet de rembourser 120 € de moins chaque mois que la formule Dynamique.

2. Les DUDU et le questionnaire

Ce problème utilise le critère de divisibilité par 9 suivant : la somme des chiffres d'un multiple de 9 est un multiple de 9.

$((n-v)\times 3+6)\times 6=(n-v)\times 18+36=((n-v)\times 2+4)\times 9$.

On obtient toujours un multiple de 9.

Si on itère la somme des chiffres jusqu'à obtenir un nombre à un chiffre, on obtient donc un multiple de 9 inférieur à 10, c'est-à-dire 9.

On trouvera donc toujours Julien DURAND en se référant à *Pi-magazine*.

chapitre 5

Équations

I. Le programme

Thème A – Nombres et calculs

Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maitrise des procédures de calcul. Les différentes composantes de ce thème sont reliées entre elles. Les élèves manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils prennent conscience du fait qu'un même nombre peut avoir plusieurs écritures (notamment écritures fractionnaire et décimale). Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour résoudre des problèmes faisant intervenir des équations ou inéquations du premier degré. À l'occasion d'activités de recherche, ils peuvent rencontrer la notion de nombres irrationnels, par exemple lors d'un travail sur les racines carrées.

Attendus de fin de cycle

- Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes
- Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers
- Utiliser le calcul littéral

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser le calcul littéral	
■ **Mettre un problème en équation en vue de sa résolution*.** ■ **Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples.** ■ **Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré.** – Notions de variable, d'inconnue. ■ **Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.**	■ Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines). ■ Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d'équation. ■ Étudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par exemple, en factorisant des équations produits simples à l'aide d'identités remarquables). ■ Montrer des résultats généraux, par exemple que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3.
Repères de progressivité	
Dès le début du cycle 4, les élèves comprennent l'intérêt d'utiliser une écriture littérale. Ils apprennent à tester une égalité en attribuant des valeurs numériques au nombre désigné par une lettre qui y figure. À partir de la 4^{e}, ils rencontrent les notions de variables et d'inconnues, la factorisation, le développement et la réduction d'expressions algébriques. Ils commencent à résoudre, de façon exacte ou approchée, des problèmes du 1er degré à une inconnue, et apprennent à modéliser une situation à l'aide d'une formule, d'une équation ou d'une inéquation. En 3^{e}, ils résolvent algébriquement équations et inéquations du 1er degré, et mobilisent le calcul littéral pour démontrer. Ils font le lien entre forme algébrique et représentation graphique.	

** En **gras** : ce qui est traité dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

Les élèves de quatrième n'ont aucune connaissance de ce qu'est une équation a priori. Ils ont travaillé en classe de cinquième sur la valeur de vérité d'une égalité. Ils sont donc à même de dire si une égalité est vraie ou fausse pour certaines valeurs attribuées aux lettres mais pas plus. Ce chapitre permet d'introduire la notion d'équation dans le but de résoudre un problème. Comme le programme et ses repères de progressivité nous y invitent, nous travaillons dans ce chapitre sur la notion d'équation et sur la mise en équation. La méthode de résolution algébrique n'étant étudiée qu'en classe de troisième, cette année, les élèves utiliseront les essais-erreurs-ajustements, les logiciels solveurs ou encore ils remonteront le programme de calcul lorsque cela est possible.
L'intérêt est de bien prendre le temps d'ancrer ce qu'est une équation et à quoi cela peut servir plutôt que d'aller trop vite sur une méthode de résolution au risque de faire passer le sens au second plan.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Mettre un problème en équation ■ Vidéo « *Je comprends* » : Résoudre un problème à l'aide d'une équation
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1. Tableur ■ Activité 2. Figure dynamique ■ Activité 3. Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciels (Tableur et GeoGebra) et leurs tutoriels vidéos
Les problèmes DUDU	■ Les DUDU s'entrainent pour le marathon

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Mettre un problème en équation

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Cette activité est largement inspirée de l'ouvrage *Les débuts de l'algèbre au collège*, INRP, 1996. Elle a en outre été reprise dans le document d'accompagnement des programmes 2005 de mathématiques *Du numérique au littéral*. Son unique but, mais qui n'est pas des moindres, est de montrer la force de l'algèbre par rapport à des résolutions de problèmes de type arithmétiques ou par essais et ajustements. Des problèmes, relativement proches par la forme, sont proposés aux élèves. Les premiers problèmes peuvent facilement être résolus par des raisonnements arithmétiques ou bien par essais et ajustements, car leurs solutions respectives sont 1,3 ; 3 et –4 mais plus on avance et moins ces méthodes s'avèrent efficaces, car pour les deux derniers problèmes, les solutions sont 2,6 et $-\frac{5}{3}$. On introduit alors des résolutions de type algébrique mais, afin de permettre aux élèves de se concentrer uniquement sur la mise en équation du problème, on laisse la charge de la résolution de l'équation obtenue à un logiciel qui jouera le rôle de solveur comme par exemple Wiris, GeoGebra, Aplusix, Derive… (tout logiciel intégrant un module de calcul formel peut convenir).
Par exemple, avec Wiris, la syntaxe pour résoudre une équation est : résoudre ($3x+5=2x+3$).
À défaut, l'enseignant pourra tout à fait construire un solveur d'équation à l'aide d'un tableur ou encore se substituer lui-même à ce solveur. En effet, lorsqu'il y en a une, la solution d'une équation du type $ax+b=cx+d$ est $x=\frac{d-b}{a-c}$.
Pour cette activité, les élèves doivent disposer d'une calculatrice et, si cela est possible, travailler deux par deux, car ces problèmes se prêtent bien à ce dispositif. Idéalement, les problèmes sont traités les uns après les autres avec chaque fois une phase bilan entre deux problèmes où les élèves expliquent et exposent leurs différentes méthodes de résolution.
À l'issue de ces cinq problèmes, l'intérêt des élèves est suscité. Plusieurs d'entre eux seront partisans de la mise en équation du problème plutôt que d'une résolution par essais et ajustements.

• *Correction*

PROBLÈME 1 : Le nombre de départ est 1,3.
PROBLÈME 2 : Le nombre de départ est 3.
PROBLÈME 3 : Le nombre de départ est –4.
PROBLÈME 4 : Le nombre de départ est 2,6.
PROBLÈME 5 : Le nombre de départ est $-\frac{5}{3}$.

Activité 2. Trouver une solution d'une équation

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Le but de cette activité est de parcourir les méthodes et les outils que les élèves ont à disposition pour résoudre une équation à ce stade de leur scolarité. Ils auront en plus, pour certaines équations, la possibilité de les considérer comme des programmes de calcul et de remonter ces programmes.

Pour cette activité, on pourra soit faire travailler chaque élève successivement avec chacune des trois façons de résoudre l'équation, ou bien séparer les élèves en groupes, chacun ayant une méthode à tester, et demander ensuite que chaque groupe fasse un compte-rendu et une démonstration à la classe.

• *Correction*

1., 2. et **3.** La solution de l'équation est 23.

Dans les questions **1.** et **2.** il pourra être intéressant de considérer l'écart entre les résultats de chaque membre afin d'ajuster au mieux les tests suivants.

Activité 3. Résoudre un problème

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Cette activité a pour objectif de guider les élèves dans la résolution de problèmes via la mise en équation de celui-ci. Les différentes étapes du raisonnement sont détaillées afin de permettre à chacun d'arriver à écrire une équation permettant de résoudre le problème donné. Pour le premier problème, la solution de l'équation obtenue est 105,5. On peut donc trouver une solution au problème. En effet, il suffit que Chloé donne à Paul 105,5 € pour qu'ils aient la même somme d'argent. Par contre, dans le second problème, bien que l'on travaille avec les mêmes nombres et la même équation à résoudre, comme il n'est pas possible de couper une carte en deux, le problème n'a pas de solution. Cette étude permet donc de bien distinguer les différentes phases de la résolution d'un problème et en particulier de bien faire la distinction entre la solution de l'équation et la solution du problème qui ne sont pas toujours identiques.

• *Correction*

1. a. $457 - x$

b. $246 + x$

c. $457 - x = 246 + x$

d. La solution de cette équation est 105,5. Si Chloé donne 105,50 € à Paul, ils auront alors la même somme d'argent.

2. En mettant ce problème en équation, on arrivera à la même solution, mais ici la solution trouvée ne peut pas être une solution du problème car on ne peut pas couper une carte en deux.

3. Poser une inconnue – Mettre le problème en équation – Trouver une solution de l'équation – Voir si la solution de l'équation est aussi une solution du problème.

■ Objectif 1. Mettre un problème en équation

Je m'entraine

1 **a.** $2n$ **b.** $3n$ **c.** $\frac{n}{2}$ **d.** $\frac{n}{4}$
e. $4n$ **f.** $\frac{n}{10}$ **g.** $5n$ **h.** $\frac{n}{3}$

2 **c.** $x - 5$.

3 **c.** $m - 123$.

4 **a.** $9 \times a$ est la somme versée par les adultes.
b. $5 \times b$ est la somme versée par les enfants.
c. $a + b$ est le nombre de personnes ayant assisté à cette séance ce soir.
d. $9 \times a + 5 \times b$ est la recette totale de cette soirée.

5 **a.** $AB = x + 6$ **b.** $AB = x - 5$ **c.** $\frac{x}{4}$
d. $4 \times x$ **e.** $3 \times x + 3$ **f.** $7 - 2 \times x$

Je résous des problèmes simples

6 **a.** $p + 2$ **b.** $p - 6$ **c.** $p \times 7$ **d.** $\frac{3}{p}$

7 **a.** $k + 1$ **b.** $k - 1$ **c.** $k + 1$; $k + 2$ et $k + 3$
d. $k - 1$; $k - 2$ et $k - 3$

8

Le périmètre du rectangle ABCD	$4x + 14$
L'aire du rectangle ABCD	$x \times (x + 7)$
L'aire du triangle rectangle AED	$\frac{x^2}{2}$
La longueur AB	$x + 7$
L'aire du triangle rectangle BCD	$\frac{x \times (x + 7)}{2}$
La longueur BC	x

9 **1.** $n + 1$ **2.** $n + n + 1 = 173$
3. $86 + 86 + 1 = 173$ **4.** 86 et 87

10 **1. a.** $10 + 3$ **b.** $10 - 5$ **c.** $2 \times (10 - 5)$
2. $10 + 13 = 13$ et $2 \times (10 - 5) = 10$, donc Peter n'a pas 10 ans aujourd'hui.
3. a. $x + 3$ **b.** $x - 5$ **c.** $2 \times (x - 5)$
4. $x + 3 = 2 \times (x - 5)$
5. $13 + 3 = 16$ et $2 \times (13 - 5) = 16$, donc $13 + 3 = 2 \times (13 - 5)$
6. Peter a 13 ans aujourd'hui.

11 **1. a.** $4 \times x$ **b.** $2 \times x$ **c.** $5 \times x$
2. $4 \times x + 2 \times x + 5 \times x = 13{,}75$.
3. $4 \times 1{,}25 + 2 \times 1{,}25 + 5 \times 1{,}25 = 13{,}75$.
4. Le prix d'un stylo peut être 1,25 €.

Objectif 2. Résoudre un problème

Je m'entraine

12 **a.** 9 ans. **b.** 26 ans. **c.** Sam a 12 poules et 36 lapins.

13 672

14 504

15 3,20 €

16 9,5

17 **a.** $x = 64$ **b.** $y = 108$

18 $a = 26°$ et $4a = 104°$

19 1,5

20 –7

21 Aucun pour 2 016, mais 1 008 + 1 009 = 2 017.

Je résous des problèmes simples

22 **1.** Soumia doit avoir 18.
2. Non, car il faudrait qu'elle ait 22 sur 20 au dernier devoir.

23 $b = 4$

24 **1. a.** $x - 3$ **b.** x **c.** $x - 3 + x = 15$
2. $x = 6$ **3.** À vérifier sur le cahier de l'élève.

25 **1. a.** $37 - n$ **b.** $n \times 5$ **c.** $(37 - n) \times 10$
d. $n \times 5 + (37 - n) \times 10$
2. On doit résoudre l'équation $n \times 5 + (37 - n) \times 10 = 255$ et on trouve $n = 23$.

26 **1.** x est compris entre 0 et 6.
2. a. Périmètre du rectangle jaune : $2x + 10$.
Périmètre du rectangle vert : $18 - 2x$.
b. Pour $x = 2$.
3. a. Aire du rectangle jaune : $5x$.
Aire du rectangle vert : $18 - 3x$.
b. Pour $x = 2{,}25$.

27 **1.** Dans 4 ans. **2.** Dans 22 ans.

28 **1.** AB = 2 cm **2.** BC = 4 cm CD = 6 cm DA = 8 cm
3. À vérifier sur le cahier de l'élève.

Je travaille seul(e)

29 B **30** B **31** C **32** C **33** B

34 **d.** $a - 7 \times 9$

35 **a.** Le périmètre de ABCD. **b.** L'aire de ABD.
c. Le périmètre de ABD. **d.** Le périmètre de BCD.

36 **c.** $6x + 14$

37 $50 - 2p$

38 **1.** $\frac{5}{8}x$ **2.** $\frac{5}{8}x = 30$ **3.** $\frac{5}{8} \times 48 = 30$
4. Léo avait 48 €.

39 **1.** $(n + 5) \times 7$
2. $(n + 5) \times 7 = 57{,}4$ **3.** $(3{,}2 + 5) \times 7 = 57{,}4$
4. Jamila a pu choisir au départ 3,2.

40 $3 \times n - 5 = 2 \times n + 3$, d'où $n = 8$: ce nombre est 8.

41 $n + n + 1 = 295$, d'où $n = 147$: les deux nombres sont 147 et 148.

42 $\frac{1}{4}n + 7 = 25$, donc $n = 72$.

43 **1.** $3 \times a = a + 8$ **2.** $a = 4$

44 $-2 \times n + 3 = 3 \times n - 5$, d'où $n = 1{,}6$.

45 $\frac{n}{2} + 6 = 3 \times n - 3$, d'où $n = 3{,}6$.

46 **1.** $n + n + 1 + n + 2 = 1728$, d'où $n = 575$. Il existe donc bien trois entiers consécutifs, 575, 576 et 577 dont la somme est égale à 1 728.
2. $n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 = 1728$,
d'où $n = 343{,}6$. Il n'existe donc pas cinq entiers consécutifs dont la somme est égale à 1 728.

47 $5 \times n - 2 = 2 \times n + 8$, d'où $n = \frac{10}{3}$.

48 $\frac{n}{4} + 7 = 2 \times n - 3$, d'où $n = \frac{40}{7}$. Donc il n'existe pas de nombre entier qui vérifie cela.

49 En posant x le nombre d'années, on obtient l'équation $(3 + x) + (6 + x) + (11 + x) = 38 + x$, d'où $x = 9$. Dans 9 ans, l'âge de la mère de Florence sera égal à la somme des âges de ses trois enfants.

50 En appelant x cette somme d'argent, on obtient l'équation $23{,}36 - x = 16{,}88 + x$, d'où $x = 3{,}24$. Arthur doit donc donner 3,24 € à Clément pour qu'ils aient la même somme d'argent.

51 Le polygone bleu a pour périmètre :
$x + (4x + 3) + x + 2x + 2x + 2x + x + (4x + 3) + x + 2x + 2x + 2x$, soit après réduction $24x + 6$.
On doit donc trouver une solution de $24x + 6 = 126$, ce qui donne $x = 5$.

52 L'aire de la surface violette est égale à $9 \times x - 3 \times (x - 5)$, soit après réduction : $6x + 15$.
On doit donc résoudre $6x + 15 = 50$, ce qui donne $x = \frac{35}{6}$, soit environ 5,8 cm.

53 Aire du rectangle vert : $4x$.
Aire du rectangle orange : $3 \times (9 - x)$.

Il faut donc résoudre $4x = 3\times(9-x)$, ce qui donne $x = \frac{27}{7}$, soit environ 3,9 cm.

54 Une boite pèse 0,450 kg, soit 450 g.

Je résous des problèmes

55 **1.** $10 - c$
2. a. $4c$ **b.** $3\times(10-c)$
3. Pour $c = \frac{30}{7}$
4. $c \approx 4{,}3$ cm

56 La largeur de l'allée est 6,75 m.

57 **1.** Il avait 26 €.
2. Il a donné 14 € à Sophie et 7 € à Stéphane.

58 Le côté du carré doit être égal à $\frac{2\times\pi}{4}\times R$ où R est le rayon du cercle.

59 E doit se trouver à 6 mètres de A sur le segment [AB]. Un logiciel de géométrie dynamique permettra de représenter la situation, d'afficher les aires des deux rectangles et de trouver ainsi une valeur approchée de la solution.

60 **1.** 23 km
2. Le fils de Michel habite à 30 km de l'aéroport et la fille d'Annie habite à 20 km de l'aéroport.

61 **1.** La boite est un carré de 25 cm de côté.
2. 36 jetons au maximum.

62 $x = 6{,}4$

63 **1.** Hauteur : 23,7 cm.
2. Rayon : 6,5 cm.

64 **1.** $120x$.
2. $90x$.
3. a. $120x + 90x = 760$. **b.** 11 h 37 environ.
c. Environ 326 km de Montpellier.

65 15 ans.

66 Le téléphone pèse 105 g et la housse 5 g.

67 Il y a 5 garçons et 8 filles dans cette famille.

Dans les autres matières

68 0,22 ampères.

69 Oui, –40 °C = –40 °F.

70 **1.** Mother : $4x$. Sister : $x-6$.
2. $x + x - 6 + 4x = 48$.
$6x - 6 = 48$.
3. a. Mike is 9 years old. **b.** 27 years old.

71 **1.** 17,142 km/h. **2.** 0,875 km, soit 850 m.

Jeux mathématiques

72 **a.** $x = 0{,}75$. **b.** $x = 0{,}5$.

73 58 zèbres et 43 autruches.

74 En appelant n l'âge de Diophante, on obtient l'équation suivante : $\frac{n}{6}+\frac{n}{12}+\frac{n}{7}+5+\frac{n}{2}+4 = n$ qui devient $\frac{75}{84}n + 9 = n$ et finalement $n = 84$. Diophante est mort à l'âge de 84 ans.

Devoirs à la maison

75 Il y a eu 14 pénaltys marqués lors de cet entrainement.

76 **1.** Aire du triangle ABC : 27 cm^2.
2. a. Aire de BDE : $\frac{(6-x)\times x}{2}$.
b. Aire de ADEF : x^2.
c. Aire de FEC : $\frac{(9-x)\times x}{2}$.
3. Additionner les trois aires précédentes.
4. a. Pour $x = 3{,}6$. **b.** À vérifier sur le cahier de l'élève.

Avec un logiciel

Activité 1. Le bassin bordé de gazon !

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Le but de cette activité est de voir comment un tableur peut aider à approcher une solution d'une équation du second degré. On pourra aussi montrer aux élèves qu'un solveur donnerait deux solutions pour cette équation, mais que l'une d'elles est en dehors de valeurs possibles de x et donc ne permettrait pas de résoudre notre problème.

On verra aussi dans cette activité comment on peut facilement affiner, rang par rang, la précision de l'encadrement d'une solution de l'équation.

• *Correction*

1. a. AG $= x$ et AE $= 11 - x$.
b. Aire de AGFE : $x\times(11-x)$.
2. a. BE $= x$ et DG $= 5 - x$.
b. Aire de la pelouse : $11\times(5-x) + x\times x$.
3. $11\times(5-x) + x\times x = x\times(11-x)$ ou encore $x^2 - 11x + 55 = 11x - x^2$.
4. a. À vérifier sur l'écran de l'élève.
b. =A2*(11–A2)
c. =55–B2
d. $3 < x < 4$.
5. $3{,}8 < x < 3{,}9$.
6. a. $3{,}84 < x < 3{,}85$ **b.** $3{,}841 < x < 3{,}842$.
7. Périmètre de la pelouse : 32 m (cela ne dépend pas de x !). Il faut donc 32 m de grillage.

Activité 2. Le triangle équilatéral et le carré

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Le but de cette activité est d'étudier géométriquement un problème à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Cela permettra dans un premier temps d'approcher la solution de problème. Les élèves pourront ensuite mettre le problème en équation et soumettre cette équation au solveur de GeoGebra. La phase de mise en équation sera facilitée par la construction faite sur le logiciel de géométrie dynamique et sa manipulation.

• *Correction*

1., 2. et **3.** À vérifier sur l'écran de l'élève.

4. a. et **b.** À vérifier sur l'écran de l'élève.

c. Pour que les périmètres soient égaux, on trouvera $AC \approx 5{,}71$.

e. Pour que les aires soient égales, on trouvera $AC \approx 6{,}03$.

5. On appelle $AC = x$.

Pour calculer l'aire du triangle, on aura besoin de calculer sa hauteur à l'aide du théorème de Pythagore, ce qui donne pour la hauteur du triangle : $\frac{x \times \sqrt{3}}{2}$.

Périmètre du triangle : $3x$.

Périmètre du carré : $4 \times (10 - x)$.

Aire du triangle : $\frac{x^2 \times \sqrt{3}}{4}$.

Aire du carré : $(10 - x)^2$.

Les solutions exactes sont donc :

– pour que le triangle et le carré aient le même périmètre, on doit avoir : $x = \frac{40}{7}$;

– pour que le triangle et le carré aient la même aire, on doit avoir : $x \approx 6{,}031228471343$.

La valeur exacte a une écriture trop complexe pour être intéressante. À noter que pour cette seconde équation il y a une seconde solution mais qui est largement supérieure à 10 et qui n'est donc pas une solution du problème.

Activité 3. Tester pour trouver une solution

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Un programme est donné aux élèves. Ils doivent dans un premier temps l'analyser pour comprendre à quoi il sert et ensuite l'utiliser et le modifier pour approcher les solutions des équations qui leur sont données.

• *Correction*

2. Ce programme sert à tester des valeurs saisies par un utilisateur pour voir si les deux membres d'une égalité sont égaux avec cette valeur. Le programme donne en plus l'écart entre les deux membres, ce qui permettra d'ajuster au mieux les prochains tests.

3. Solution exacte de l'équation : –14.

4. Solution exacte de l'équation : 16,96.

■ Tâches complexes

1. Installer des tyroliennes

Pour résoudre ce problème, en appelant x la distance entre le plus petit arbre et l'arrivée des tyroliennes, on doit résoudre l'équation : $30^2 + x^2 = (50 - x)^2 + 40^2$(les deux hypoténuses des deux triangles rectangles sont égales).

La résolution de cette équation par une méthode au choix donne une seule solution : $x = 32$.

Patrick doit donc installer l'arrivée des tyroliennes à 32 m du petit arbre et donc à 18 m du grand arbre.

La longueur de câble nécessaire sera donc :

$\sqrt{30^2 + 32^2} + \sqrt{18^2 + 40^2} = 4\sqrt{481} \approx 88$ m.

Cela va donc lui couter : $88 \times 3{,}69 \approx 324{,}72$ €.

2. Les problèmes DUDU

Les DUDU ont mis différents temps chaque jour de la semaine pour faire les 12 km de leur parcours : lundi (98 min), mardi (52 min), mercredi (61 min), jeudi (54 min), vendredi (59 min).

Ils n'ont pas le temps pour le samedi, mais ils savent que sur la semaine (samedi y compris) leur vitesse moyenne a été de 3,2 m/s.

On appelle x le temps en minutes mis le samedi.

Sur la semaine, ils ont mis $324 + x$ minutes pour faire 72 km.

On peut donc faire un tableau de proportionnalité :

Distance (en m)	72 000	192
Temps (en min)	$324 + x$	1

En utilisant le produit en croix, on en sort une équation dont la solution est 51.

Ils ont donc mis 51 min le samedi et ont bien battu leur record de la semaine.

chapitre 6

Proportionnalité

I. Le programme

Thème B – Organisation et gestion de données, fonctions

La plupart des notions travaillées dans ce thème ont déjà été abordées aux cycles précédents. Au cycle 4, les élèves apprennent à utiliser une représentation adaptée de données pour en faire une interprétation critique. Ils abordent les notions d'incertitude et de hasard, afin de construire une citoyenneté critique et rationnelle. Ils apprennent à choisir une méthode adaptée au problème de proportionnalité auquel ils sont confrontés. Ils découvrent progressivement la notion de fonction, qui leur permet d'accéder à de nouvelles catégories de problèmes.

Attendus de fin de cycle

- Interpréter, représenter et traiter des données
- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités
- Résoudre des problèmes de proportionnalité
- Comprendre et utiliser la notion de fonction

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Résoudre des problèmes de proportionnalité	
■ **Reconnaitre une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité*.**	■ Étudier des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non ; ces relations peuvent être exprimées par : – des formules (par exemple la longueur d'un cercle ou l'aire d'un disque comme fonction du rayon, la loi d'Ohm exprimant la tension comme fonction de l'intensité) ; – des représentations graphiques (par exemple des nuages de points ou des courbes) ; – un tableau (dont des lignes ou des colonnes peuvent être proportionnelles ou non).
■ **Résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle.** ■ **Résoudre des problèmes de pourcentage.** – Coefficient de proportionnalité.	■ Compléter un tableau de proportionnalité en utilisant, par exemple, le produit en croix. ■ Calculer et interpréter des proportions (notamment sous forme de pourcentages) sur des données économiques ou sociales ; appliquer des pourcentages (par exemple, taux de croissance, remise, solde, taux d'intérêt) à de telles données. ■ Établir le fait que, par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5% c'est multiplier par 0,95 ; proposer quelques applications (par exemple que l'on n'additionne pas les remises).

** En **gras** : ce qui est traité dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

La proportionnalité occupe toujours une place centrale dans les programmes du cycle 4. Les outils nouveaux découverts et étudiés en cycle 3 autour de la proportionnalité sont repris et approfondis en début de cycle 4. Le recours au tableau permet à la fois la reconnaissance des situations de proportionnalité et aussi la recherche de quatrième proportionnelle. La détermination de pourcentages, l'utilisation et le calcul d'échelle de plan peuvent aussi être travaillés à l'aide de tableaux.

Ici, la caractérisation graphique de la proportionnalité et l'étude de problèmes utilisant des grandeurs variées viennent enrichir les situations de recherche proposées aux élèves.

Une grande part de nos activités et exercices ont donc été réservées à la résolution de problèmes.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Appliquer la règle de la quatrième proportionnelle ■ Vidéo « *Je comprends* » : Représenter graphiquement une situation de proportionnalité ■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer une échelle ■ Vidéo « *Je comprends* » : Effectuer des calculs de pourcentages
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif sur le site pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Tableur ■ Activité 3 : Tableur ■ Activité 4 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : La baisse des prix

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Déterminer une quatrième proportionnelle

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'utilisation de tableaux pour calculer une quatrième proportionnelle a déjà été étudiée en classe de cinquième. Ici, l'idée est d'apporter une nouvelle méthode pour calculer cette quatrième proportionnelle sans utiliser le coefficient de proportionnalité ou la linéarité. Cette activité propose donc de découvrir, en justifiant, l'égalité des produits en croix.

L'objectif, au final, est de faire découvrir par l'élève un nouveau processus calculatoire permettant de calculer rapidement une quatrième proportionnelle.

• *Correction*

1. Un tableau est un tableau de proportionnalité si les quotients des valeurs de la première ligne par celles de la seconde sont égaux donc $\frac{7}{32} = \frac{m}{120}$.

2. En mettant au même dénominateur ces deux fractions, on obtient :

$$\frac{7 \times 120}{32 \times 120} = \frac{m \times 32}{120 \times 32}$$

donc $7 \times 120 = m \times 32$.

3. On en déduit $m = 26{,}25$.

4. L'enchainement d'opération donnant m est $7 \times 120 : 32$.

Activité 2. Caractériser graphiquement la proportionnalité

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'objectif de cette activité est d'établir la caractérisation de la proportionnalité par l'alignement des points avec l'origine du repère. Elle se décompose en deux parties.

La lecture de renseignements sur des graphiques permettra à l'élève de compléter des tableaux et lui permettra de reconnaitre des situations de proportionnalité. Le lien entre la représentation graphique et la proportionnalité pourra alors être mis en évidence.

• Correction

1.

La course cycliste de Marco

Temps de course (en h)	0,5	2	4	5
Distance parcourue (en km)	**20**	**80**	**160**	**200**

La facture téléphonique de Lisa

Temps de communication (en h)	1	3	6	8
Prix à payer (en €)	**5**	**7**	**10**	**12**

Le four du boulanger

Temps de fonctionnement (en min)	10	30	60	120
Température (en °C)	**110**	**180**	**220**	**240**

2. Le tableau n° 1 est un tableau de proportionnalité, car $\frac{20}{0,5} = \frac{80}{2} = \frac{160}{4} = \frac{200}{5} = 40$.

Les tableaux n° 2 et n° 3 ne sont pas des tableaux de proportionnalité, car les quotients des valeurs de la seconde ligne par ceux de la première ne sont pas égaux.

3. Il semble que l'on puisse reconnaitre une situation de proportionnalité sur un graphique si les points sont alignés avec l'origine du repère.

Activité 3. Utiliser la proportionnalité pour calculer des grandeurs

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité propose de découvrir la notion de vitesse moyenne et permet de calculer, sur un exemple, la vitesse moyenne d'une voiture connaissant la distance parcourue et la durée du parcours. Le lien avec l'égalité $d = v \times t$ peut être établi.

• Correction

1. a. $d = 13\,930 - 13\,410 = 520$ km.

b. $t = 13$ h 00 – 08 h 00 = 5 h 00.

2. a. Mélina n'effectue pas tout son trajet à la même vitesse, car il y a des intersections, des virages, des péages, des stops…

b. En moyenne, Mélina parcourt 520 : 5 = 104 km par heure.

c. À la vitesse de 104 km/h pendant 3 h, Mélina aurait parcouru 3 × 104 = 312 km.

Activité 4. Manipuler des pourcentages pour résoudre des problèmes

• Considérations didactiques et mise en pratique

Les élèves ont déjà utilisé des pourcentages en classe de sixième pour appliquer un taux de pourcentage connu et en classe de cinquième pour calculer un pourcentage. Cette activité propose de déterminer le pourcentage relatif à un groupe constitué de la réunion de deux groupes dont les effectifs et les pourcentages relatifs à ce caractère sont connus.

• Correction

1. a. Lucas a calculé la moyenne des teneurs en cacao en faisant (60 + 80) : 2 = 70.

Lucie a ajouté les teneurs en cacao et calculé 60 + 80 = 140.

b. Ces deux méthodes ne sont pas correctes.

2. a. 60 % de 150 g = 60 × 150 : 100 = 90 g pour la première tablette.

b. 80 % de 250 g = 80 × 250 : 100 = 200 g pour la seconde tablette.

c. La masse totale de cacao pur est donc de 90 + 200 = 290 g.

d. La teneur en cacao est donc de $\frac{290}{400} = 0,725$ soit 72,5 %.

■ Objectif 1. Déterminer une quatrième proportionnelle

Je m'entraine

1 **a.** 12 dictionnaires pèsent 18 kg.
b. 11 livres pèsent 4,4 kg.
c. 12 boulons pèsent 70 g.

2 **a.** Oui **b.** Oui **c.** Non **d.** Oui

3 **a.** Non **b.** Oui **c.** Non **d.** Oui

4 $a = 6,4$ $b = 10,5$ $c = 27,5$

5 **a.**

300	**540**
500	900

b.

8	22
14	**38,5**

c.

45	**135**
17	51

d.

5	7
18	**25,2**

6 **a.**

200	80
500	**200**

b.

12	60
15	**75**

c.

2,6	5
7,8	15

d.

11	**5,5**
16	8

7 $a = 5,2$ $b = 10,5$
$c = 1,28$ $d = 16$

8 $x = 32$ $y = 7$ $z = 2,88$

Je résous des problèmes simples

9 $\frac{150 \times 200}{125} = 240$ mg de calcium.

10 **1.** $\frac{4 \times 110}{80} = 5,5$ cm sur la carte.

2. $\frac{9,2 \times 80}{4} = 184$ km en réalité.

11 $\frac{24 \times 5,2}{2,5} = 49,92$ soit environ 50 minutes.

12

Masse de pommes (en kg)	2,500	4,500	**10,000**
Prix (en €)	5,25	**9,45**	21,00

13

Distance parcourue (en km)	55	70	**120**
Prix du péage (en €)	**4,40**	5,60	9,60

14 **1.** $\frac{40 \times 1000}{125} = 320$ mg de vitamine C.

2. $\frac{60 \times 125}{40} = 187,5$ mL de jus d'orange.

15 **1.** $\frac{7 \times 1,5}{2,5} = 4,2$ kg de sucre.

2. $\frac{1000 \times 1,5}{4} = 375$ g de sucre.

16 $\frac{3700 \times 112}{2} = 207\ 200$ g soit 207,2 kg de carbone.

17 $\frac{200 \times 35}{80} = 87,5$ cL de jus d'orange.

$\frac{200 \times 15}{80} = 37,5$ cL de jus de pamplemousse.

$\frac{200 \times 25}{80} = 62,5$ cL de limonade.

$\frac{200 \times 5}{80} = 12,5$ cL de sirop de grenadine.

18 **1.** $\frac{18 \times 24}{4} = 108$ L en une journée.

$108 \times 30 = 3\ 240$ L en un mois.

$108 \times 365 = 39\ 420$ L en un an.

2. $3,240 \times 4,15 = 13,45$ € par mois

et $39,42 \times 4,15 = 163,59$ € par an.

■ Objectif 2. Caractériser graphiquement la proportionnalité

Je m'entraine

19 La courbe bleue et la courbe verte.

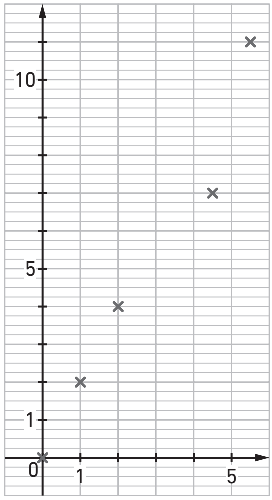
20 Les graphiques **a.** et **d.** traduisent une situation de proportionnalité, car les points sont alignés avec l'origine du repère.

Le graphique **b.** ne traduit pas une situation de proportionnalité, car les points ne sont pas alignés.

Le graphique **c.** ne traduit pas une situation de proportionnalité, car les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère.

Je résous des problèmes simples

21 **1.**

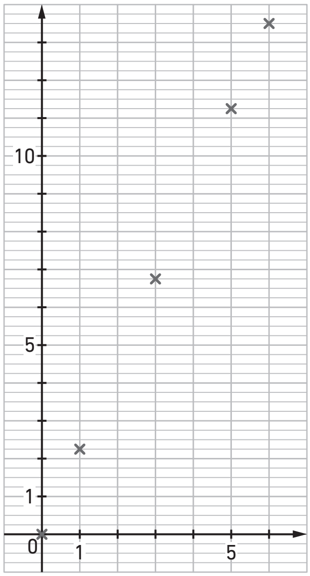


2. a. Les points ne sont pas alignés donc le tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

b. $2 \times 7 = 14$ et $4 \times 4,5 = 18$.

Les produits en croix ne sont pas égaux donc le tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

3.



a. Les points sont alignés avec l'origine du repère donc le tableau est un tableau de proportionnalité.

b. 2,25 : 1 = 2,25 ;

6,75 : 3 = 2,25 ;

11,25 : 5 = 2,25 ;

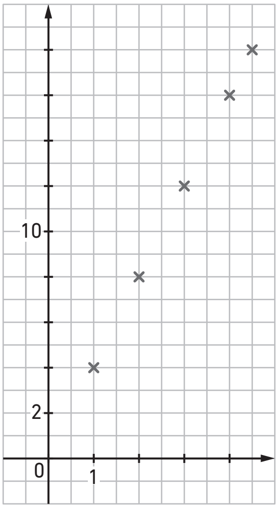
13,50 : 6 : 2,25.

Tous les quotients sont égaux donc le tableau est un tableau de proportionnalité.

22 **1.**

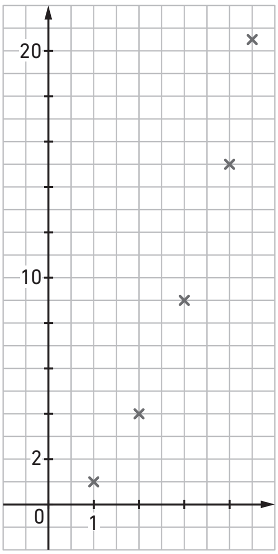
Longueur du côté (en cm)	1	2	3	4	4,5
Périmètre (en cm)	**4**	**8**	**12**	**16**	**18**
Aire (en cm^2)	**1**	**4**	**9**	**16**	**20,25**

a.



b. Oui, car tous les points sont alignés avec l'origine du repère.

3. a.

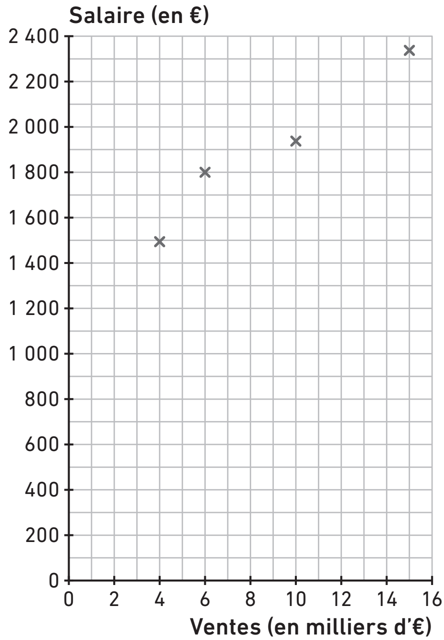


b. Non, car les points ne sont pas alignés.

23 100 cL à 2,80 €.
200 cL à 3,60 €.
300 cL à 5,00 € mais 5 n'est pas la somme de 2,8 et 3,6 donc les tarifs ne sont pas proportionnels à la contenance du pot.

24 **1.** 70 €.
2. Oui, car tous les points sont alignés avec l'origine du repère.

25 **1.**



2. Non, car les points ne sont pas alignés.

■ Objectif 3. Utiliser la proportionnalité pour calculer des grandeurs

Je m'entraine

26 **1. a.** $d = 24$ km **b.** $d = 42$ km **c.** $d = 57$ km
2. a. $t = 30$ min **b.** $t = 2$ h **c.** $t = 2$ h 30 min
3. a. 30 L **b.** 150 L **c.** 900 L

27 $d = 11000 \times 24 = 264\,000$ km.

28 **1.** 1 h 45min = 1,75 h. **2.** $d = 20 \times 1{,}75 = 35$ km.

29 $t = \dfrac{31{,}5}{1{,}5} = 21$ h.

30 $t = \dfrac{900}{100} = 9$ h.

31 $v = \dfrac{42}{3} = 14$ km/h.

32 **1.** $135 \times 200\,000 = 27\,000\,000$ cm = 270 km en réalité.
2. 124 km : 200 000 = 12 400 000 cm : 200 000 = 62 cm sur la carte.

33 **1.**

	Paris - Lille	Paris - Brest	Paris - Toulouse	Paris - Marseille	Paris - Strasbourg
Distances réelles (en km)	220	560	**640**	800	**455**
Distances sur la carte (en cm)	44	**112**	128	**160**	91

2. 220 km = 22 000 000 et 22 000 000 : 44 = 500 000 donc l'échelle de la carte est 1/500 000.

Je résous des problèmes simples

34 **1.** $t = \frac{50}{90} \approx 0{,}56$ h, soit 33 min 20 s.
2. $t = \frac{100}{130} \approx 0{,}77$ h, soit 46 min 09 s.
3. Pierre : $t = \frac{50}{100} = 0{,}5$ h, soit 30 min.
Le gain de temps est seulement de 3 min 20 s.
Adèle : $t = \frac{100}{140} \approx 0{,}714$ h, soit 42 min 51 s.
Le gain de temps est seulement de 3 min 18 s.

35 Nantes – Cholet : environ 54 km.
Nantes – Angers : environ 80 km.
Angers – Cholet : environ 54 km.

36 **1.** $209\,000 \times 60 \times 60 \times 24 = 18\,000\,000\,000$
$= 1{,}8 \times 10^{10}$ m^3 environ.
2. 209 000 **:** $(50 \times 25 \times 3) = 55{,}7$ donc 55 piscines environ chaque seconde.

37 $\frac{63}{1500} \times 100 = 4{,}2$ L / 100 km.

38 **1. a.** $30 \times 1\,000 = 30\,000$ g $= 30$ kg de sel par m^3.
b. $330 \times 1\,000 = 330\,000$ g $= 330$ kg de sel par m^3.
2. 1 000 kg : 30 kg $\times$ 1 m^3 = 33,3 m^3 d'eau de mer.

39 **1. a.** $2 \times 60 = 120$ Mo par minute.
$120 \times 60 = 7\,200$ Mo $= 7{,}2$ Go par heure.
b. 100 : 2 = 50 secondes pour 100 Mo.
2. a. $5 \times 60 = 300$ Mo par minute.
$300 \times 60 = 18\,000$ Mo $= 18$ Go par heure.
b. 100 : 5 = 20 secondes pour 100 Mo.

■ Objectif 4. Manipuler des pourcentages pour résoudre des problèmes

Je m'entraine

40 **a.** 9 Mo
b. 100 km
c. 42 L
d. 120 €

41 $\frac{60}{100} \times 30 = 18$, il y a 18 voitures blanches dans ce garage.

42

Prix initial (en €)	100	20,00	42,00	57,00
Prix après réduction (en €)	**85,00**	**17,00**	**35,70**	**48,45**

43 37 : 400 × 100 = 9,25, il y a 9,25 % de « double 6 ».

44 2 617 : 8 235 × 100 ≈ 31,74, 31,74 % des habitants sont licenciés dans un club de sport.

45 **1.** $\frac{10}{100} \times 24 = 2{,}4$ donc Max a passé 2,4 h, soit 2 h 24 min, à jouer à la console.
2. 1 h 30 min = 1,5 h et $\frac{1{,}5}{24} \times 100 = 6{,}25$ donc Émilie passe 6,25 % de son temps devant la télévision.

46 **1.** $\frac{30}{100} \times 55 = 16{,}5$ et $\frac{28}{100} \times 55 = 15{,}4$ donc la masse de protéines est de 16,5 kg et celle de matières grasses est de 15,4 kg.
2. $\frac{0{,}530}{55} \times 100 \approx 0{,}96$ et $\frac{0{,}333}{55} \times 100 \approx 0{,}61$ donc l'emmental contient environ 0,96 % de calcium et 0,61 % de phosphore.

47 $\frac{70}{100} \times 250 = 175$ filles sont demi-pensionnaires.
$\frac{90}{100} \times 310 = 279$ garçons sont demi-pensionnaires.
Il y a donc 454 élèves demi-pensionnaires sur un total de 560.
Et $\frac{454}{560} \approx 0{,}81$, soit environ 81 % d'élèves demi-pensionnaires.

Je résous des problèmes simples

48 **1.** $\frac{60}{100} \times 75 = 45$ donc il y a 45 adultes et 30 enfants.
2. $\frac{40}{100} \times 30 = 12$ donc il y a 12 garçons et 18 filles.

49 $\frac{64}{100} \times 3\,500 = 2\,240$ et $\frac{80}{100} \times 2\,240 = 1\,792$, il y a 1 792 adolescentes.

50 **1.** $\frac{60}{100} \times 250 = 150$ et $\frac{44}{100} \times 150 = 66$, il y a 66 roses rouges.
2. $\frac{66}{250} \times 100 = 26{,}4$, les roses rouges représentent 26,4 % des fleurs du massif.

51 **1.** $\frac{9{,}7}{100} \times 0{,}04306 = 0{,}00417682$ et
$0{,}04306 + 0{,}00417682 = 0{,}04723682$.
$\frac{4{,}7}{100} \times 0{,}04723682 = 0{,}002220131$ et
$0{,}04723682 + 0{,}002220131 = 0{,}049456951$.
Le tarif du gaz naturel après ces deux augmentations est donc de 0,049456951 €/kWh.
2. $0{,}00417682 + 0{,}002220131 = 0{,}006396951$ donc le tarif a augmenté de 0,006396951 €.
$\frac{0{,}006396951}{0{,}04306} \times 100 \approx 14{,}86$, le prix a donc augmenté de 14,86 % environ.

52 **1.** Lundi : le prix est de 60 €.
Mardi : $\frac{30}{100} \times 60 = 18$ et $60 - 18 = 42$ donc le prix du mardi est de 42 €.
Mercredi : $\frac{40}{100} \times 42 = 16{,}8$ et $42 + 16{,}8 = 58{,}80$ donc le prix du mercredi est de 58,80 €.
Le prix de l'article le jeudi matin est de 58,80 €.
2. On obtient une légère baisse du prix.

53 **1.** $\frac{40}{100} \times 240 = 96$ donc 96 femmes font de la compétition.
2. $\frac{60}{100} \times 360 = 216$ donc 216 hommes font de la compétition.
3. $216 + 96 = 312$ et $\frac{312}{600} \times 100 = 52$ donc 52 % des licenciés font de la compétition.

54 $\frac{30}{100} \times 80 = 24$ donc Lucien donne 24 livres.
$\frac{70}{100} \times 60 = 42$ donc Lucien donne 42 BD.
$24 + 42 = 66$ et $\frac{66}{140} \times 100 \approx 47{,}14$ donc Lucien donne environ 47 % de sa bibliothèque.

55 **1.** $\frac{12}{25} \times 100 = 48$ donc il y a 48 % de filles dans la classe de Nina.
2. $\frac{14}{20} \times 100 = 70$ donc il y a 70 % de filles dans la classe de Ly Ahn.
3. $12 + 14 = 26$, $25 + 20 = 45$ et $\frac{26}{45} \times 100 \approx 57{,}8$ %, le pourcentage de filles dans la salle sera d'environ 57,8 %.

56 $\frac{72}{100} \times 2\,600 = 1\,872$ donc 1 872 adultes ont joué au jeu.
$\frac{40}{100} \times 4\,150 = 1\,660$ donc 1 660 enfants ont joué au jeu.
$1\,872 + 1\,660 = 3\,532$ et $\frac{3\,532}{2\,600 + 4\,150} \times 100 \approx 52{,}3$%.
Donc environ 52,3 % des visiteurs du festival ont joué au jeu « Point final ».

Je travaille seul(e)

57 A **58** C **59** B **60** B **61** C

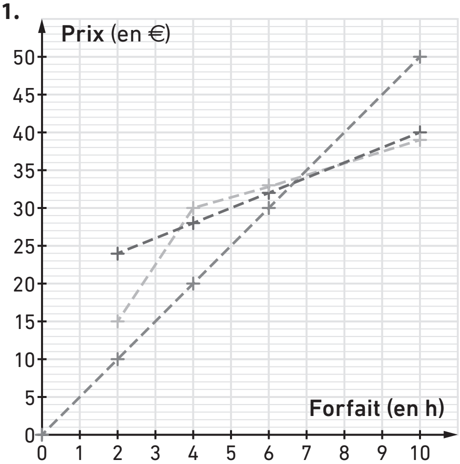
62

Temps de téléchargement (en s)	10	80	130
Taille du fichier téléchargé (en Mo)	12	96	156

63 Pour 12 personnes :
$\frac{75}{5} \times 12 = 180$ g de sucre ; $\frac{80}{5} \times 12 = 192$ de beurre ;
$\frac{5}{5} \times 12 = 12$ œufs ; $\frac{250}{5} \times 12 = 600$ g de farine ;
$\frac{30}{5} \times 12 = 72$ cL de lait.

64 **1.** 10 € pour 2 h, 17,50 € pour 3 h 30 min et 23 € pour 5 h 30 min.
2. 6 h 30 min.
3. Non, car les points ne sont pas alignés sur le graphique.

65 **1.**



2. Pour la salle de jeux « Laser Flip », le tarif est proportionnel au nombre de parties jouées, car les points sont alignés avec l'origine du repère.
« Battle Game » et « Shot'n Laser » : les tarifs ne sont pas proportionnels au nombre de parties jouées.

66 **1.** $v = \frac{d}{t} = \frac{4 \text{ km}}{5 \text{ min}} = 0{,}8$ km/min $= 48$ km/h.
2. $d = v \times t = 36 \times \frac{36}{60} = 21{,}6$ km.
3. $t = \frac{d}{v} = \frac{1\,000}{20} = 50$ s.

67 **1.** $\frac{80}{10} \times 120 = 960$ L.
2. $\frac{10\,000}{80} \times 10 = 1\,250$ min, soit 20 h 50 min.

68 **1.** $24 \times 15 = 360$ cm. **2.** $180 \div 15 = 12$ cm.

69 Orange – bleu : 31 km, soit 17 miles nautiques.
Orange – vert : 43 km, soit 23 miles nautiques.
Orange – violet : 55 km, soit 30 miles nautiques.
Orange – jaune : 252 km, soit 136 miles nautiques.

70 **1.** $20 \times \frac{35}{100} = 7$ € pour une place de cinéma.
2. $\frac{8{,}40}{20} = 0{,}42$, soit 42 %.

71 Collège Jeanne Alise : $\frac{65}{100} \times 120 = 78$, donc 78 ont obtenu le DNB.
Collège Jacques Sélaire : $\frac{80}{100} \times 90 = 72$, donc 72 élèves ont obtenu le DNB.
$72 + 78 = 150$ et $120 + 90 = 210$, donc, dans cette ville, 150 élèves sur 210 ont obtenu le DNB.
Soit un pourcentage de : $\frac{150}{210} \times 100 \approx 71{,}4$ %.

Je résous des problèmes

72 **1.**

Durée d'utilisation (en h)	24	1 000	3 000
Prix de l'électricité utilisée par une ampoule BC de 20 W (en €)	0,0540	**2,25**	**6,75**
Prix de l'électricité utilisée par une ampoule INC de 75 W (en €)	0,2025	**8,4375**	**25,3125**

2. $25{,}31 - 6{,}75 = 18{,}56$ donc Marc réalise une économie de 18,65 €.
3. $8 \times 10 \times 5 \times 52 \times 2 = 41\,600$ donc Éloïse utilise 41 600 h d'électricité.
$0{,}2025 - 0{,}0540 = 0{,}1485$ donc la différence de prix est de 0,1485 € par tranche de 24 h d'utilisation.
$0{,}1485 : 24 \times 41\,600 = 257{,}40$; l'économie réalisée en 2 ans est de 257,40 €.

73 **1. a.** On voit d'abord l'éclair, car la vitesse de la lumière est supérieure à celle du son.

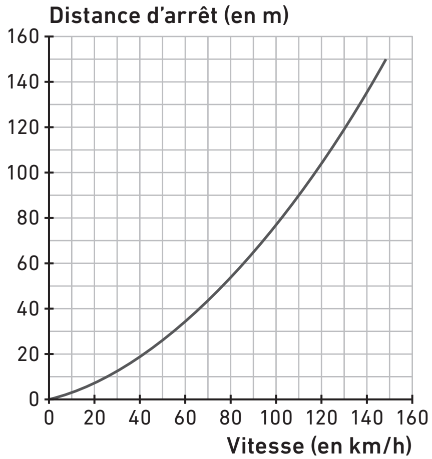
b. La vitesse de la lumière est tellement grande qu'en comparaison le temps mis par la lumière pour parcourir 12 km est négligeable.

c. $d = 12\,000$ m et $v = 340$ m/s donc $t = \dfrac{12\,000}{340} \approx 35$ s.

2. a. $d = 1\,000$ m et $v = 340$ m/s donc $t = \dfrac{1000}{340} \approx 3$ s.

b. On compte le nombre de secondes écoulées entre la lumière de l'éclair et le bruit du tonnerre. On divise par 3 et on obtient approximativement la distance (en km) qui nous sépare de l'endroit où est tombée la foudre.

74 **1. a.** 25 m.
b. Oui, car les points du graphique sont alignés avec l'origine du repère.
2. a. 38 m environ.
b. Non, car les points du graphique ne sont pas alignés.
3. a. 25 m + 38 m = 51 m.
b.



75 **1.** 3 600 km.
2. $v = 3\,600 : 36 = 100$ km/h.

76 Pour une chemise qui coutait 100 €, la main d'œuvre coutait 60 € et le textile 40 €.
Après augmentation, la main d'œuvre coûte 66 € et le textile 52 €, soit un total de 118 €.
L'augmentation globale est donc de 18 %.

77 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. La largeur est x. La longueur est $2x + 3$.
L'aire est $(2x + 3)x = 2x^2 + 3x$.
3.

x (en cm)	2	3	7	10
Aire (en cm^2)	**14**	**27**	**119**	**230**

Non, car les quotients $\dfrac{14}{2}$ et $\dfrac{27}{3}$ ne sont pas égaux.

4. À vérifier sur le cahier de l'élève.

78 **1. a.** 340 m/s = 1 224 km/h donc l'Airbus A380 (qui vole à la vitesse de 900 km/h) n'est pas un avion supersonique.
b. Le Rafale (qui vole à 2 200 km/h) est un avion supersonique.
2. a. Mach 1 = 1 224 km/h
b. Mach 2 = 2 448 km/h
c. Mach 3,5 = 4 284 km/h
3. a. 900 : 1 224 ≈ 0,74 donc la vitesse de l'Airbus A380 est d'environ Mach 0,74.
b. 2 200 : 1 224 ≈ 1,8 donc la vitesse du Rafale est d'environ Mach 1,8.

Dans les autres matières

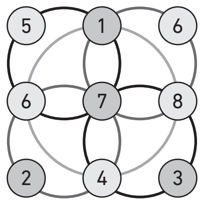
79 **1.** 200 000 : 58 ≈ 3 448 personnes par jour en moyenne.
2. 18 : 1,5 = 12 h.

80 $50 \times 1{,}609 = 80{,}45$ donc 50 miles = 84,45 km.
Pour faire 84,45 km, John consomme 3,785 litres, donc pour faire 100 km, il consomme :
$3\,785 : 84{,}45 \times 100 = 4{,}7$ L.
La voiture de Marc consomme moins.

81 **1. a.** 12 nœuds = 22,224 km/h
b. 18 nœuds = 33,336 km/h
c. 25 nœuds = 46,3 km/h
2. a. 20 km/h ≈ 10,8 nœuds
b. 30 km/h ≈ 16,2 nœuds
c. 50 km/h ≈ 27 nœuds

82 Il faut 3 chats.

83



84 12 heures et 48 minutes.

85 Si on ouvre les robinets 1 et 2 pendant 180 minutes, on peut remplir 9 bassins.
Si on ouvre les robinets 1 et 3 pendant 180 minutes, on peut remplir 6 bassins.
Si on ouvre les robinets 2 et 3 pendant 180 minutes, on peut remplir 10 bassins.
Donc si on ouvre les trois robinets pendant 360 minutes, on peut remplir 25 bassins.
360 : 25 = 14,4 min = 14 min 24 s donc pour remplir un bassin avec les 3 robinets, il faut les ouvrir pendant 14 min 24 s.

Devoirs à la maison

86 **1.** Temps de Léo : $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{640}{80} = 8\,\text{h}$.
Léo arrive donc à 17 h et Léa doit mettre 6 h seulement.
Vitesse de Léa : $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{640}{6} \approx 106{,}7\,\text{km/h}$.
2. La distance de Brest à Caen est de 374 km.
Temps de Léo : $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{374}{80} = 4{,}675\,\text{h}$, soit 4 h 40min 30 s.

Léa doit donc mettre 2 h 40 min 30 s, c'est-à-dire 2,675 h.
Vitesse de Léa : $v = \frac{d}{t} = \frac{374}{2{,}675} \approx 139{,}8\,\text{km/h}$, ce qui n'est pas possible (excès de vitesse).

87 **1.** 12 h 30.
2. 420 km.
3. Ludo a fait une pause de 30 min à 9 h 30.
4. $v = \frac{120}{1{,}5} = 80$ km/h avant sa pause.
$v = \frac{300}{2{,}5} = 120$ km/h après sa pause.
Ludo a mis 4 h 30 min pour faire le trajet complet.
$v = \frac{420}{4{,}5} \approx 93{,}33$ km/h sur le trajet complet.

■ Avec un logiciel

Activité 1. Consommation de carburant

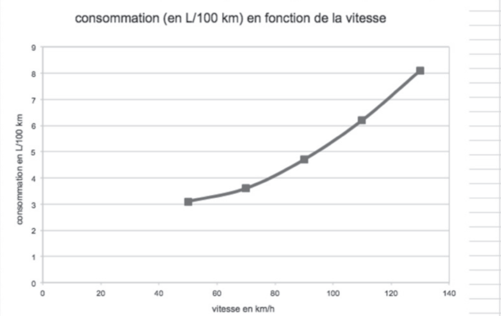
• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité rapide permet de travailler et de développer deux compétences mathématiques :
– la représentation graphique d'une grandeur en fonction d'une autre ;
– la reconnaissance de la proportionnalité à partir d'un graphique ou d'un tableau.
Les compétences « tableur » utilisées dans cette activité sont simples à mettre en œuvre à l'aide des fiches logiciels :
– Construire un graphique à l'aide d'une feuille de calcul (fiche Tableur 4).

• Correction

1. et **2.** Voir fichier logiciel sur le site compagnon.

	A	B	C	D	E	F
1	vitesse (en km/h)	50	70	90	110	130
2	consommation (en L/100km)	3,1	3,6	4,7	6,2	8,1



3. La consommation n'est pas proportionnelle à la vitesse, car le graphique obtenu ne montre pas des points alignés avec l'origine du repère.

Activité 2. Prix de revient du voyage

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité propose de résoudre un problème concret sur le prix de revient d'un voyage.
Elle permet travailler et de développer plusieurs compétences mathématiques :
– le calcul de quatrièmes proportionnelles ;
– la manipulation de grandeurs composées (consommation de carburant en L/100 km ; prix en €/L, vitesse en km/h).
Les compétences « tableur » utilisées dans cette activité :
– saisir une formule dans une feuille de calcul (fiche Tableur 1) ;
– recopier une formule dans une feuille de calcul (fiche Tableur 2).

• Correction

	A	B	C	D	E	F
1		nb de litres de carburant	coût du carburant	péage route	coût total du trajet	distance (km)
2	Sur route nationale	47,24	63,77 €	- €	63,77 €	1005
3	Sur autoroute	79,06	106,73 €	78,08 €	184,81 €	976
4						
5				différence	121,04 €	

3. La différence de coût est de 121,04 €.
4. Sur route nationale, le temps est de
$t = \frac{d}{v} = \frac{1005}{90} = 11{,}16\,\text{h}$ soit 11 h 10 min.
Sur autoroute, le temps est de $t = \frac{d}{v} = \frac{976}{130} = 7{,}5\,\text{h}$ soit 7 h 30 min.

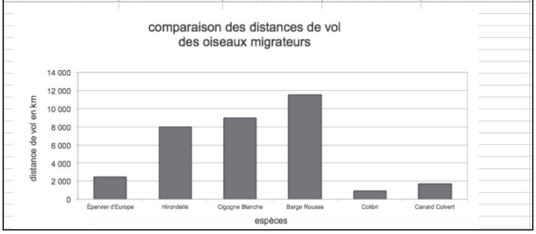
Activité 3. Les oiseaux migrateurs

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet de travailler et de développer plusieurs compétences mathématiques :
– calcul de vitesse moyenne ;
– représentation graphique d'une série de données ;
– tri de données.
Plusieurs compétences « tableur » du programme de 4e sont utilisées dans cette activité mais sont simples à mettre en œuvre à l'aide des fiches méthodes :
– saisir une formule dans une feuille de calcul (fiche Tableur 1) ;
– recopier une formule dans une feuille de calcul (fiche Tableur 2) ;
– construire un graphique à l'aide d'une feuille de calcul (fiche Tableur 4) ;
– trier des données dans une feuille de calcul (fiche Tableur 5).

• Correction

Espèce	type de migration	distance de vol (en km)	durée de vol (en heures)	vitesse moyenne (en km/h)
Épervier d'Europe	en plusieurs étapes	2 500	60	41,67
Hirondelle	en plusieurs étapes	8 000	190	42,11
Cigogne Blanche	en plusieurs étapes	9 000	180	50,00
Barge Rousse	sans escale	11 500	192	59,90
Colibri	sans escale	950	15	63,33
Canard Colvert	sans escale	1 700	24	70,83



Activité 4. Triangles proportionnels

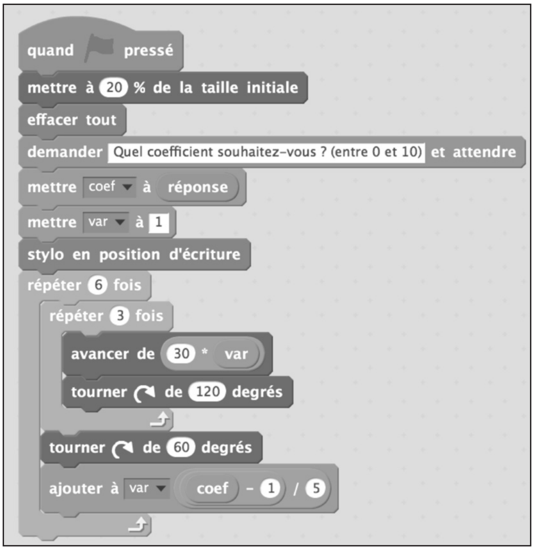
• Considérations didactiques et mise en pratique

L'objectif de cette activité est d'utiliser Scratch pour construire un triangle équilatéral et d'étudier l'effet d'un agrandissement (de coefficient choisi par l'utilisateur) sur ce triangle.

Un prolongement de l'activité est proposé pour obtenir 6 triangles équilatéraux dont les dimensions varient progressivement et permettent d'obtenir une figure donnée.

• *Correction*

Voir fichier logiciel sur le site compagnon.



■ Tâches complexes

1. Un train à prendre

À l'aide de l'échelle, on peut estimer la longueur du trajet du collège à la gare : environ 1,250 km.

Un marcheur (à un rythme de marche correct) avance à la vitesse de 5 km/h environ.

Lili mettra donc environ 15 minutes pour aller à la gare.

Entre 16 h 45 et 17 h 01, il y a 16 minutes.

Lili devrait pouvoir prendre le train de 17 h 01, mais il ne lui faut pas perdre de temps…

Si Lili court à la vitesse de 8 km/h environ, elle mettra environ 9 minutes et elle aura son train.

2. Les problèmes DUDU

Les prix ont baissé, mais les masses également.

Le prix au kg est finalement plus élevé.

Plus précisément :

Avant : 2,39 € pour 250 g, soit 9,56 € par kg.

Après : 1,82 € pour 150 g, soit 12,13 € par kg.

La baisse de prix n'en est donc pas vraiment une.

chapitre 7

Statistiques et probabilités

I. Le programme

Thème B – Organisation et gestion de données, fonctions

La plupart des notions travaillées dans ce thème ont déjà été abordées aux cycles précédents. Au cycle 4, les élèves apprennent à utiliser une représentation adaptée de données pour en faire une interprétation critique. Ils abordent les notions d'incertitude et de hasard, afin de construire une citoyenneté critique et rationnelle. Ils apprennent à choisir une méthode adaptée au problème de proportionnalité auquel ils sont confrontés. Ils découvrent progressivement la notion de fonction, qui leur permet d'accéder à de nouvelles catégories de problèmes.

Attendus de fin de cycle

- Interpréter, représenter et traiter des données
- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités
- Résoudre des problèmes de proportionnalité
- Comprendre et utiliser la notion de fonction

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Interpréter, représenter et traiter des données	
■ **Recueillir des données, les organiser*.** ■ **Lire des données sous forme de données brutes, de tableau, de graphique.** ■ **Calculer des effectifs, des fréquences.** **– Tableaux, représentations graphiques (diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires, histogrammes).** ■ **Calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion d'une série statistique.** **– Indicateurs : moyenne, médiane, étendue.**	■ Utiliser un tableur, un grapheur pour calculer des indicateurs et représenter graphiquement les données. ■ Porter un regard critique sur des informations chiffrées, recueillies, par exemple, dans des articles de journaux ou sur des sites web. ■ Organiser et traiter des résultats issus de mesures ou de calculs (par exemple, des données mises sur l'environnement numérique de travail par les élèves dans d'autres disciplines) ; questionner la pertinence de la façon dont les données sont collectées. ■ Lire, interpréter ou construire un diagramme dans un contexte économique, social ou politique : résultats d'élections, données de veille sanitaire (par exemple consultations, hospitalisations, mortalité pour la grippe), données financières relatives aux ménages (par exemple impôts, salaires et revenus), données issues de l'étude d'un jeu, d'une œuvre d'art…
Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités	
■ **Aborder les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples.**	■ Faire le lien entre fréquence et probabilité, en constatant matériellement le phénomène de stabilisation des fréquences ou en utilisant un tableur pour simuler une expérience aléatoire (à une ou à deux épreuves).

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
■ **Calculer des probabilités dans des cas simples.** **– Notion de probabilité.** **– Quelques propriétés : la probabilité d'un évènement est comprise entre 0 et 1 ; probabilité d'évènements certains, impossibles, incompatibles, contraires.**	■ Exprimer des probabilités sous diverses formes (décimale, fractionnaire, pourcentage). ■ Calculer des probabilités dans un contexte simple (par exemple, évaluation des chances de gain dans un jeu et choix d'une stratégie).

** En **gras** : ce qui est traité dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

Au cours du cycle 3, les élèves ont été mis en situation de prendre de l'information à partir de tableaux, de diagrammes ou de graphiques puis de réaliser ce type de présentation pour organiser des données.

Au cycle 4, plusieurs nouvelles compétences mathématiques font leur apparition : le calcul de moyenne, de médiane, d'étendue d'une série de données.

L'utilisation de feuilles de calcul reste un attendu fort du programme. Elles permettent, à l'aide de formules, de réaliser des calculs sur un grand nombre de données mais aussi de représenter graphiquement ces données. Plusieurs de nos activités et de nos exercices, souvent conduits à partir d'exemples en liaison avec l'enseignement des autres disciplines et l'étude des thèmes de convergence, permettent de développer à la fois ces compétences mathématiques et ces compétences « tableur ».

Les caractéristiques de position d'une série statistique sont introduites dès le début du cycle. Les élèves rencontrent des caractéristiques de dispersion à partir de la quatrième.

Parallèlement, dès le début et tout au long du cycle 4, sont abordées des questions relatives au hasard, afin d'interroger les représentations initiales des élèves, en partant de situations issues de la vie quotidienne (jeux, achats, structures familiales, informations apportées par les médias, etc.), en suscitant des débats.

On introduit et consolide ainsi petit à petit le vocabulaire lié aux notions élémentaires de probabilités (expérience aléatoire, issue, probabilité). Les élèves calculent des probabilités en s'appuyant sur des conditions de symétrie ou de régularité qui fondent le modèle équiprobable.

À partir de la quatrième, l'interprétation fréquentiste permet d'approcher une probabilité inconnue et de dépasser ainsi le modèle d'équiprobabilité mis en œuvre en cinquième.

Remarque au sujet de l'activité 2 (p. 156) et de tous les **travaux utilisant les feuilles de calculs** : très souvent, les enseignants recherchent des activités « pour démarrer » avec le tableur. Nous proposons dans ce manuel des activités qui peuvent être mises en œuvre avec les élèves ayant déjà ou n'ayant pas encore utilisé un tableur. Des fiches méthodes permettent d'expliquer les aspects techniques des fonctionnalités des feuilles de calcul et favorise une activité plus autonome de la part de l'élève. Avant des séances en salle multimédia, un premier usage collectif d'un tableur, en classe, à l'aide d'un vidéo-projecteur, permet aux élèves, non seulement de percevoir le tableur comme un outil naturel pour faire des mathématiques, mais également de découvrir des fonctionnalités de base de cet outil logiciel.

Nos activités et nos exercices ne sont pas des activités pour « faire du tableur » mais bien des activités et des exercices pour « faire des mathématiques avec l'aide d'un tableur ».

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3** **Objectif 4**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer une étendue ■ Vidéo « *Je comprends* » : Organiser, calculer et représenter des données à l'aide d'un tableur ■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer une probabilité simple ■ Vidéo « *Je comprends* » : Comprendre la notion de probabilité
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Tableur ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU cherchent à savoir qui est le meilleur en maths

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Étudier les caractéristiques d'une série de données

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

L'objectif de cette activité est de revoir la notion de moyenne et de médiane d'une série de données. L'étude de deux séries (une d'effectif pair et une d'effectif impair) permet à l'élève de retravailler les différentes stratégies pour déterminer ces caractéristiques de position.

Elle aborde également de façon simple l'étendue d'une série statistique, définie comme différence entre la plus grande valeur (ici le score le plus élevé) et la plus petite valeur (ici le score le plus faible), qui est assez naturelle pour les élèves.

L'usage d'un tableur est possible et permet d'introduire les fonctions MAX et MIN.

• ***Correction***

1. On ne peut pas ajouter les scores, car il n'y a pas le même nombre de joueurs dans chaque équipe.

2., 3. et **4.**

Équipe verte : Moyenne = 112 ; Médiane = 108 ; Étendue = 28.
Équipe bleue : Moyenne = 112 ; Médiane = 96 ; Étendue = 92.

Activité 2. Étudier des données à l'aide d'un tableur

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

L'objectif de cette activité utilisant une feuille de calcul est à la fois de travailler les compétences de calcul de moyenne, les compétences « tableur » demandées par le programme (utilisation de formules) et aussi de montrer que les feuilles de calcul permettent, en modifiant une donnée, de trouver automatiquement un résultat correct. Les feuilles de calcul sont particulièrement adaptées aux calculs de moyenne, car il existe plusieurs façons de calculer, avec un tableur, la somme et la moyenne d'une série de données :

– la somme peut se calculer à partir d'une formule simple (=B1+B2+B3+….) ;
– à l'aide d'une fonction (=somme(B2:I2) ;
– le calcul de la moyenne peut lui aussi se calculer à partir de formules ou à l'aide de fonctions.

La dernière partie de l'activité propose de changer ou de supprimer des notes pour mettre en évidence la puissance des feuilles de calcul qui, une fois bien « programmées », permettent d'obtenir un résultat correct sans nouveau calcul.

• ***Correction***

1. À vérifier sur l'écran de l'élève.

2. Les formules 2 et 3 sont correctes. Il manque des parenthèses dans la formule 1.

3. Les moyennes sont : Ismahan : 10,5 ; Alexis : 9,75 ; Mathilde : 13,625.
Les étendues sont : Ismahan : 13 ; Alexis : 15 ; Mathilde : 7.

Activité 3. Calculer des probabilités dans des situations simples

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Cette activité propose aux élèves une expérience aléatoire avec des calculs de probabilité simple.
Les notions d'évènement et d'évènement contraire sont introduites naturellement.

• ***Correction***

1. Il y a 6 tirages différents.
2. 3 boules.
3. 7 boules.
4. Tirer un nombre impair est plus probable (7 chances sur 10) que de tirer un nombre pair (3 chances sur 10).
5. Il n'y a pas de boule orange avec un nombre pair.
6. Ils ont 4 chances sur 10 de gagner et 6 chances sur 10 de perdre.

Activité 4. Passer de la fréquence à la probabilité

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Cette activité permet de passer de la notion de fréquence de réalisation d'un évènement à la notion de probabilité. Le jeu proposé aux élèves (lancer de deux dés et calcul de la somme) est simple à mettre en œuvre en classe et cette activité gagne à être accompagnée, au moins en début de séance, de lancers réels de dés par les élèves.
L'activité peut se décomposer en trois temps :

Temps 1 : lancers réalisés par les élèves. Ceci permet aux élèves de bien comprendre le jeu proposé et surtout de faire un premier pas vers le fait que certaines sommes sont « plus fréquentes » que d'autres.

Temps 2 : mise en commun des résultats des élèves. Le tableau complet construit à l'aide de tous les lancers de la classe met en évidence des fréquences d'apparition de certaines sommes plus fortes que d'autres et peut donner l'occasion d'un débat collectif constructif.

Temps 3 : recherche d'une preuve mathématique. L'étude d'un modèle mathématique permettant de justifier ces fréquences différentes permet également d'aller vers la notion de fréquence théorique, de probabilité.
En plus du travail vers la notion de probabilité, cette activité montre une utilisation facile et intégrée du tableur, utilisé ici comme outil permettant de rassembler les résultats des expériences menées par les élèves et comme outil de calcul, mais non comme un logiciel de simulation.
L'activité peut cependant être prolongée par l'utilisation de fonctions de simulation du tableur : « alea » ou « alea.entre.bornes », et ce prolongement peut amener à s'interroger sur l'utilisation de l'ordinateur pour simuler une expérience aléatoire.

Objectif 1. Étudier les caractéristiques d'une série de données

Je m'entraine

1 Série A : 6 . Série B : 1. Série C : 20.

2 **a.** Moyenne = 6,6. Médiane = 5. Étendue = 13.
b. Moyenne = 14,8. Médiane = 12. Étendue = 20.
c. Moyenne = 12,4. Médiane = 11. Étendue = 8.

3 **a.** Moyenne = 146,7. Médiane = 85. Étendue = 350.
b. Moyenne = 13. Médiane = 13. Étendue = 12.
c. Moyenne = 31,33. Médiane = 10. Étendue = 134.

4 **1.** 21,71 °C.
2. 22 °C.
3. 9 °C.

5 **1.** Moyenne $= \dfrac{(20\times 6+40\times 24+60\times 14+80\times 6)}{50}$
$= 48\,\text{min}$.
2. Médiane = 40 min.
3. Étendue = 60 min.

6 **1.** Moyenne $= \dfrac{(166\times 0+21\times 5+9\times 10+4\times 50)}{200}$
$= 1{,}98$ €.
2. Médiane = 0 €.
3. Étendue = 50 €.

Je résous des problèmes simples

7 Par exemple : 10 ; 10 ; 30 ; 32 ; 84 ; 100.

8 Moyenne =
$\dfrac{(10\times 4\,500+15\times 8\,000+18\times 7\,000+25\times 3\,000)}{22\,500}$
$= 16{,}27$ €.

9 **1.** En 1990. Le plus faible : Italie. Le plus fort : Royaume-Uni.
2. En 1990. Moyenne = 1,57.
3. En 2015. Le plus faible : Italie. Le plus fort : France.
4. En 2015. Moyenne = 1,66.
5. La France ; le Royaume-Uni ; la Belgique ; le Luxembourg ; l'Italie ; l'Espagne.

10 Moyenne $= \dfrac{(6{,}5\times 18+7{,}5\times 25+8{,}5\times 12+9{,}5\times 7)}{62}$
$= 7{,}63$ h soit 7 h 38 min.

11 **1.** Moyenne =
$\dfrac{(35\times 42+45\times 72+55\times 48+65\times 31+75\times 13)}{196}$
$= 49{,}4$ km/h.
2. $\dfrac{82}{196} = 0{,}418$ soit 41,8 % environ.

12 **1.** Moyenne de Liam :
$\dfrac{(12\times 2+18\times 1+17\times 1+10\times 3+9\times 3)}{10} = 11{,}6.$
2. Manon doit avoir 16 au dernier test.

Objectif 2. Étudier des données à l'aide d'un tableur

Je m'entraine

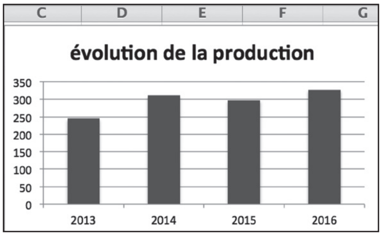
13 **a.** Vrai.
b. Faux.
c. Vrai.

14 La moyenne est de 13,43.

15 **1.** La moyenne est de 295,75 tonnes et l'étendue est de 83 tonnes.

	A	B
1	année	production (en tonnes)
2	2013	245
3	2014	312
4	2015	298
5	2016	328
6		
7	moyenne	295,75
8	étendue	83
9		
10		

2.



16 **1.** En B5, on a le nombre d'hommes de plus de 60 ans.
2. Il manque le nombre total d'hommes et le nombre total de femmes.
3. a. Il y a 8 133 204 hommes entre 20 et 40 ans.
b. Il y a 9 045 111 femmes entre 40 et 60 ans.
c. Il y a 16 372 546 jeunes de moins de 20 ans.
d. La population française est de 66 835 199.
4. Il y a plus de femmes que d'hommes dans la classe d'âge des plus de 60 ans (ligne 5).

Je résous des problèmes simples

17 **a.** 6 + 8. **b.** 14. **c.** 48.
d. 5. **e.** 28.

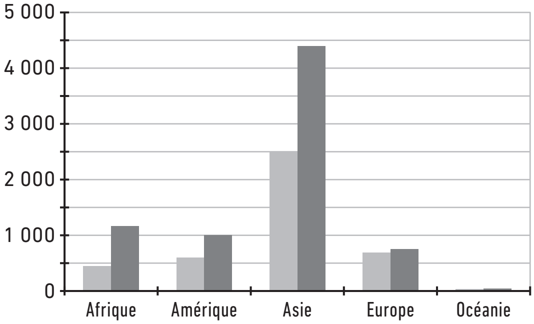
18 Fréquence cardiaque moyenne des garçons : 92.
Fréquence cardiaque moyenne des filles : 99.
Fréquence cardiaque moyenne du groupe : 95.

19 **1., 2.** et **3.**

	A	B	C	D
1	*Facture pour Madame Maggie Bolle*			
2				
3		Prix unitaire HT	Nombre	Tarif
4	tee-shirt coloré	9,90 €	3	**29,70 €**
5	chaussette (la paire)	2,50 €	4	**10,00 €**
6	gilet noir	12,00 €	1	**12,00 €**
7				
8			Total (H.T)	51,70 €
9			TVA (19,6%)	10,13 €
10				
11			frais de port	5,00 €
12				
13			Total à payer	**61,83 €**

20 Tableau des 4e A : graphique n° 3.
Tableau des 4e B : graphique n° 1.
Tableau des 4e C : graphique n° 4.
Tableau des 4e D : graphique n° 2.

21 **1.** et **2.**



3. Les barres de l'Océanie sont très peu visibles, car la population de ce continent est très faible.
4. La plus forte hausse en nombre d'habitants est pour l'Asie. La plus forte hausse en pourcentage est pour l'Afrique qui a plus que doublé sa population.

■ Objectif 3. Calculer des probabilités dans des situations simples

Je m'entraine

22 **a.** $\frac{1}{6}$.
b. $\frac{1}{6}$.
c. 0.
d. $\frac{1}{3}$.
e. 1.

23 **1.** 30 issues possibles.
2. a. $\frac{1}{30}$. **b.** $\frac{1}{2}$. **c.** $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$. **d.** $\frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

24 **1. a.** $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{2}$.
2. Oui c'est possible (la probabilité est de $\frac{1}{8}$).

25 **1. a.** La probabilité de tirer une dame est $\frac{4}{32}$ soit $\frac{1}{8}$.
b. La probabilité de tirer un 8 est $\frac{4}{32}$ soit $\frac{1}{8}$.
c. La probabilité de tirer un carreau est $\frac{1}{4}$.
d. La probabilité de tirer une carte noire est $\frac{1}{2}$.
e. La probabilité de tirer le 7 de pique est $\frac{1}{32}$.
2. a. La probabilité de tirer une dame est $\frac{4}{52}$ soit $\frac{1}{13}$.
b. La probabilité de tirer un 8 est $\frac{4}{52}$ soit $\frac{1}{13}$.
c. La probabilité de tirer un carreau est $\frac{1}{4}$.
d. La probabilité de tirer une carte noire est $\frac{1}{2}$.
e. La probabilité de tirer le 7 de pique est $\frac{1}{52}$.

Je résous des problèmes simples

26 Il a tort. Une probabilité de $\frac{3}{2}$ n'est pas possible.

27 **1.** $\frac{5}{8}$.
2. $\frac{3}{8}$.
3. $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
4. $\frac{5}{8}$.
5. $\frac{3}{8}$.
6. 0.

28 **1.** Il y a 4 cartes jaunes dans le sac.
2. La probabilité est de $\frac{4}{9}$ soit environ 0,44.

29 L'équipe O/E a 21 points.
L'équipe S/N a donc 19 points. La probabilité qu'elle ait 20 points est de 0.

30 La probabilité de tirer un 3 est de $\frac{3}{20}$.
La probabilité de tirer un nombre pair est de $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

31 La réponse est la **b.** : $\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 20\ \%$

■ Objectif 4. Faire le lien entre la fréquence des issues et la probabilité

Je m'entraine

32 **a.** Faux.
b. Faux.
c. Faux.
d. Vrai.

33 **1.** $\frac{1}{6}$
2. Oui, elle n'est n'a pas joué un grand nombre de fois.
3. La fréquence des 6 va s'approcher de $\frac{1}{6}$.

34 **1.** $\frac{1}{2}$.
2. a. Oui. C'est possible avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
b. La probabilité reste de $\frac{1}{2}$.

■ Je résous des problèmes simples

35 **1.** La probabilité que cette personne soit du groupe sanguin A est de 0,45.
2. La probabilité que cette personne soit du groupe sanguin B est de 0,09.
3. La probabilité que cette personne soit de rhésus positif (Rh+) est de 0,85.
4. La probabilité que cette personne soit du groupe sanguin O négatif est de 0,06.

36 **1.** On ne peut pas savoir, car il n'y a pas de modélisation mathématique pour cette épreuve.
2. a. Nombre total de lancers : 3 752.

b. $\frac{1\,573}{3\,752} = 0{,}419$ soit 42 % environ.
c. Le nombre de lancers étant assez grand, on peut penser que la probabilité d'obtenir une punaise sur le dos est proche de 0,42.

37 **1.** Michel Païba bénéficie du plus grand nombre d'intentions de vote.
2. La probabilité qu'une des personnes ayant répondu au sondage ait prévu de voter pour Nicole Mulot est de 0,208.
3. Les résultats officiels pourront être différents, car le sondage est effectué sur seulement 1 000 personnes.

38 **1. a.** La fréquence d'apparition de la couleur jaune est $\frac{20}{100} = 0{,}02$.
b. La fréquence d'apparition de la couleur noire est $\frac{30}{100} = 0{,}03$.
2. La probabilité d'obtenir la couleur jaune est de $\frac{1}{6}$ soit environ 0,166.
La probabilité d'obtenir la couleur noire est de $\frac{2}{6}$ soit environ 0,333.
3. L'écart entre les fréquences obtenues et les probabilités est dû à un nombre d'expériences assez faible (100 lancers). Si on lance le dé un plus grand nombre de fois, la fréquence d'apparition des différentes couleurs s'approchera de $\frac{1}{6}$ pour le jaune et de $\frac{2}{6}$ pour le noir.

Je travaille seul(e)

39 C **40** B **41** C **42** B **43** A

44 **1.** La moyenne est de 12,14.
2. La médiane est de 13.
3. L'étendue est de 10.

45 **1.** Nombre total : 105.
2. La moyenne est de 15 tweets par jour.
3. Nombre médian : 9. **4.** Étendue : $33 - 6 = 27$.

46 **1.** La formule peut être « =B2+B3+B4+B5 » ou « =somme(B2:B5) ». Ce nombre est 21.
2. La formule peut être
« =(B2*C2+B3*C3+B4*C4+B5*C5)/somme(B2:B5) ».
Ce prix moyen est 5,57 €.

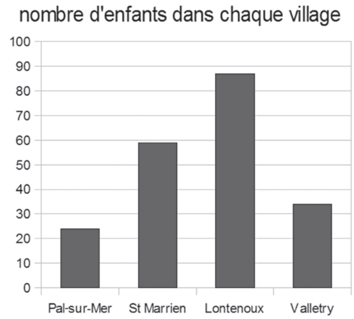
47

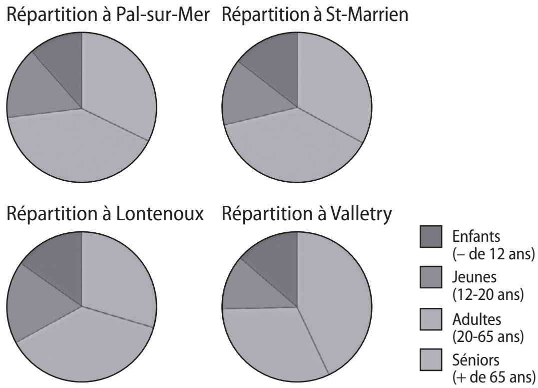
	A	B	C	D
1		nombre de glaces	prix unitaire	prix
2	1 boule	7	1,50 €	10,50 €
3	2 boules	5	2,50 €	12,50 €
4	3 boules	3	3,50 €	10,50 €
5				
6			total	**33,50 €**

48 **1. 2.**

	A	B	C	D	E	F	G
1	villages	enfants (- de 12 ans)	jeunes (12 — 20 ans)	adultes (20 — 65 ans)	séniors (+de 65 ans)		nombre d'habitants
2	Pal sur Mer	24	32	85	67		208
3	St Marrien	59	58	156	134		407
4	Lontenoux	87	99	213	167		566
5	Valletry	34	28	78	105		245
6							
7	total	204	217	532	473		

3.





49 **1.** Il y a 50 issues.
2. a. $\frac{1}{50}$ **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{1}{10}$ **d.** $\frac{16}{50} = \frac{8}{25}$

50 Il y a une chance sur 6.

51 **1.** $P(\text{rouge}) = \frac{5}{8}$. $P(\text{bleu}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
2. a. Oui, c'est possible. **b.** $\frac{5}{8}$.

52 **1. a.** Faux. **b.** Vrai.
2. Environ 12,5 %, car il y a $\frac{1}{8}$ chance d'obtenir « 3 piles ».

53 Nombre **d'expériences** : 487.
bleu : fréquence $= \frac{93}{487}$, soit environ 19 %.
rouge : fréquence $= \frac{243}{487}$, soit environ 50 %.
jaune : fréquence $= \frac{151}{487}$, soit environ 31 %.
Sur 10 billes, on peut penser qu'il y a 2 bleues, 5 rouges et 3 jaunes.

■ Je résous des problèmes

54 **1.** Le mois de novembre a été le plus pluvieux.

2. $\dfrac{(12+11+9+10+5+7+8+3+9+12+15+13)}{12} = \dfrac{114}{12}$
$= 9{,}5$

donc le nombre moyen de jours de pluie est de 9,5 par mois.

3. $P(\text{pluie}) = \dfrac{114}{365} = 0{,}312$ soit environ 31 %.

55

		Étage choisi par Chris		
		1	2	3
Étage choisi par Lili	1			
	2			
	3			

1. Il y a 9 combinaisons possibles. Pour 3 d'entre elles, Chris et Lulu descendent au même étage. La probabilité que Chris et Lulu descendent au même étage est de $\frac{3}{9}$ soit $\frac{1}{3}$.

2. Pour 2 combinaisons, Chris descend un étage en dessous de celui de Lulu. La probabilité que Chris descende un étage en dessous de celui de Lulu est donc de $\frac{2}{9}$.

3. Pour 5 combinaisons, au moins une des deux personnes descend au deuxième étage. La probabilité qu'au moins une des deux personnes descende au deuxième étage est donc de $\frac{5}{9}$.

56 **1.** 36 % des personnes interrogées pratiquent quotidiennement moins de 15 minutes d'activité physique.

2. $29 + 12 + 2 = 43$ donc 43 % des personnes interrogées pratiquent quotidiennement plus de 30 minutes d'activité physique.

3. $\dfrac{(7{,}5\times 36+22{,}5\times 21+37{,}5\times 29+52{,}5\times 12+90\times 2)}{100}$
$= 26{,}4$

donc, en moyenne, une personne interrogée pratique une activité physique ou sportive pendant 26,4 min par jour.

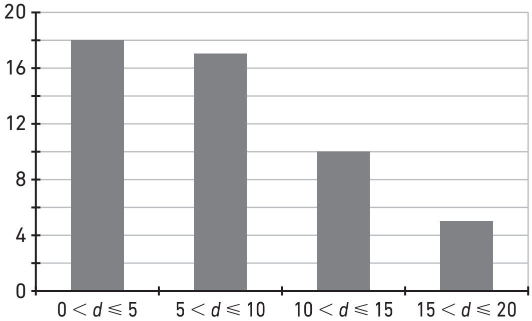
57 La réponse est incorrecte.
Il y a 75 briques en tout.
La probabilité de tirer une brique bleue est de $15/75 = 0{,}2$.

58 **1.**

Distance (en km)	Effectif	Fréquence (en %)
$0 < d \leqslant 5$	18	36
$5 < d \leqslant 10$	17	34
$10 < d \leqslant 15$	10	20
$15 < d \leqslant 20$	5	10

2. $\dfrac{(2{,}5\times 18+7{,}5\times 17+12{,}5\times 10+17{,}5\times 5)}{50} = 7{,}7$ donc la distance moyenne parcourue par un collégien pour venir au collège est 7,7 km.

3.



59 Chloé a une moyenne de 10,76 environ, Martin de 9,62 environ et Nassim de 12,91.
Donc Chloé et Nassim ont obtenu leur examen.

60 $\dfrac{(110\times 5+190\times 15+85\times 25+60\times 35)}{(110+190+85+60)} = \dfrac{7\,625}{445} \approx 17.$

Le temps moyen est donc de 17 min.

61 **1. a.** L'aire d'un carreau de ce carrelage est de 10 cm^2.
b. Pour que le joueur réalise un « franc carreau », le centre de la pièce doit se situer dans un carré de 8 cm de côté.
c. L'aire de cette partie est de 64 cm^2.
d. La probabilité de gagner à ce jeu est de $\frac{64}{100}$, c'est-à-dire 0,64.
e. On a 64 % de chance de gagner à ce jeu, c'est donc un jeu « rentable ».
2. a. L'aire d'un carreau est de 64 cm^2.
b. Pour que le joueur réalise un « franc carreau », le centre de la pièce doit se situer dans un carré de 5 cm de côté.
c. L'aire de cette partie est de 25 cm^2.
d. La probabilité de gagner à ce jeu est de $\frac{25}{64}$, c'est-à-dire 0,39.
e. On a 39 % de chance de gagner à ce jeu, ce n'est donc pas un jeu « rentable ».

■ Dans les autres matières

62 **1.** Ilia peut donner son sang aux groupes AB+ , AB–, B+ et B–.
2. Le groupe AB+ permet de recevoir le groupe de tout le monde.
3. Le groupe O– est appelé donneur universel.

63 Il reste 30 cartes : 7 cœurs + 7 piques + 2 autres as + 2 autres 7, soit 18 cartes correspondantes à ce que l'on cherche.
Ainsi, la probabilité est de $\frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

64 Densité de la région Alsace-Champagne-Ardenne-Lorraine : 96,5 hab/km^2.
Densité de la région Aquitaine-Limousin-Poitou-Charentes : 68,7 hab/km^2.
Densité de la région Auvergne-Rhône-Alpes : 109,5 hab/km^2.
Donc la région Auvergne-Rhône-Alpes est la plus dense.

Jeux mathématiques

65 **1. a.** La probabilité que le coup de Victor touche un bateau est de $\frac{17}{100}$ soit 0,17.

b. La probabilité que le coup de Victor tombe à l'eau est de $\frac{83}{100}$ soit 0,83.

c. La probabilité que le coup de Victor touche le plus grand bateau est de $\frac{5}{100}$ soit 0,05.

2. a. La probabilité que le coup de Marion touche un bateau est de $\frac{17}{64}$ soit 0,27.

b. La probabilité que le coup de Marion tombe à l'eau est de $\frac{47}{64}$ soit 0,73.

c. La probabilité que le coup de Marion touche le plus grand bateau est de $\frac{5}{64}$ soit 0,08.

66 De gauche à droite : roi de carreau, valet de pique, reine de cœur.

67 Il existe 49 nombres à 3 chiffres dans lesquels le chiffre des unités est la moyenne du chiffre des dizaines et de celui des centaines.

Devoirs à la maison

68 **1. a.** et **b.**

	A	B	C	D
1	Pays	Superficie (en km²)	Population (en hab)	Densité (en hab/km²)
2	Équateur	283 560	13 363 593	47,13
3	Colombie	1 138 910	42 954 279	37,72
4	Vénézuela	912 050	25 375 281	27,82
5	Pérou	1 285 220	29 180 899	22,7
6	Chili	756 050	16 800 000	22,22
7	Brésil	8 514 877	187 550 726	22,03
8	Uruguay	176 220	3 415 920	19,38
9	Paraguay	406 750	6 347 884	15,61
10	Argentine	2 766 890	41 152 037	14,87
11	Bolivie	1 098 580	8 857 870	8,06
12	Guyana	214 970	765 283	3,56
13	Suriname	163 270	438 144	2,68
14				
15	total	17 717 347	376 201 916	21,23

2. a. La superficie totale est de 17 717 347 km^2 et la population totale est de 376 201 916 habitants.

b. Les trois pays les plus étendus sont le Brésil, l'Argentine et le Pérou.

c. Les trois pays les plus peuplés sont le Brésil, la Colombie et l'Argentine.

3. a. Voir tableur.

b. Les trois pays les plus denses sont l'Équateur, la Colombie et le Venezuela.

c. La densité du continent est de 21,43 hab/km^2. Mais la densité moyenne des douze pays est de 20,32 hab/km^2.

69 Luccio a marqué 134 points $(50 + 2 \times 25 + 3 \times 10 + 4 \times 1)$ en 10 fléchettes soit une moyenne de 13,4 points par lancer $\left(\frac{134}{10}\right)$.

Avec un logiciel

Activité 1. Moyenne trimestrielle

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Cette activité permet de travailler et de développer plusieurs compétences mathématiques :
– la lecture de renseignements dans un tableau ;
– le calcul de moyennes simples ;
– le calcul de moyennes pondérées.

Les trois « modes de calcul » proposés permettent à la fois de retravailler les différents calculs de moyennes (simples, pondérées par des coefficients) mais aussi d'étudier le cas particulier d'un « devoir bonus » qui n'entre en ligne de compte dans la moyenne que s'il augmente la moyenne de l'élève. Plusieurs modélisations de ce bonus sont possibles : prendre le maximum entre deux calculs de moyennes (moyenne sur 5 notes et moyenne sur 6 notes) ou utiliser un test logique (fonction « si » du tableur).

Particularités :

Les compétences « tableur » du programme de 4^e utilisées dans cette activité sont nombreuses mais leur mise en œuvre peut être facilitée par les fiches méthodes pour un travail autonome de l'élève :
– saisir une formule dans une feuille de calcul (fiche tableur 1) ;
– recopier une formule dans une feuille de calcul (fiche tableur 2) ;
– utiliser une fonction dans une feuille de calcul (fiche tableur 6).

Un prolongement possible au calcul des moyennes pondérées par des coefficients consiste à saisir les coefficients sur une nouvelle ligne (ex : ligne 2 au-dessus de chaque devoir) et de demander aux élèves de trouver des formules permettant de calculer les moyennes pondérées qui tiennent compte d'un changement possible de coefficients. Dans ce cas, l'utilisation de référence absolue à une cellule (utilisation du $ - voir fiche tableur 7) peut-être évoquée.

• *Correction*

2. a. La formule saisie peut être « =moyenne(B4:G4) » et la moyenne simple d'Anaïs est de 13,17.

b. Les moyennes obtenues sont respectivement : 10,17 ; 13,17 ; 8,50

3. a. La formule saisie peut être « =(B4*2+C4*2+D4*2+E4+F4+G4*3)/11 » et la moyenne pondérée d'Anaïs est de 12,73.

b. Les moyennes obtenues sont respectivement 10,45 ; 13,09 ; 8,73

4. a. La formule saisie peut être « =MAX(MOYENNE(B4:G4); MOYENNE(B4:F4)) » et la moyenne en tenant de la règle du bonus pour Anaïs est de 13,20.

b. Les moyennes obtenues sont respectivement 10,17 ; 13,60 ; 8,50

Activité 2. Comparatif des voitures

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet de travailler l'utilisation d'une formule avec plusieurs lettres et le tri de données.

Les compétences « tableur » du programme de 4^{e} utilisées dans cette activité sont nombreuses, mais leur mise en œuvre peut être facilitée par les fiches méthodes pour un travail autonome de l'élève :

– saisir une formule dans une feuille de calcul (fiche tableur 1) ;

- recopier une formule dans une feuille de calcul (fiche tableur 2) ;

- trier des données dans une feuille de calcul (fiche tableur 5).

En fin d'exercice, la recherche d'une nouvelle formule qui permettrait à la voiture Citrono de remporter le classement est un petit problème ouvert intéressant qui permet soit d'utiliser la capacité du tableur à faciliter les essais des élèves, soit de mettre l'accent sur une analyse des données pour réfléchir à une formule adéquate.

• Correction

	A	B	C	D	E	F
1	Voiture	Écologie (E)	Confort (C)	Sécurité (S)	Prix (P)	**Note finale**
2	Forddy Ky	4	2	4	2	**24**
3	BMZ W8	1	3	5	2	**22**
4	Kika alpha	3	1	3	2	**18**
5	Citrono 5	2	5	1	4	**16**
6	Runno XS	3	1	1	3	**13**

4. Une formule possible est note finale $= E + 4 \times C + S + 2 \times P$

Activité 3. Deviner le nombre

• Considérations didactiques et mise en pratique

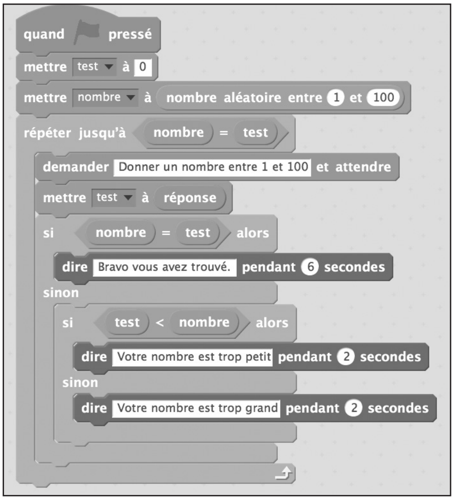
Cette activité permet aux élèves de programmer sur Scratch un petit jeu pour deviner un nombre.

Les compétences algorithmiques développées dans cette activité sont nombreuses (utilisation de variables, de boucles) mais pas très complexes.

Le logiciel Scratch est tout à fait adapté pour mettre en œuvre ce type d'algorithme de jeux simples.

• Correction

Un algorithmique possible ici est :



■ Tâches complexes

1. Le prix du riz

Le total des exportations en 2015 était de 37,9 millions de dollars.

13 % de cette somme correspondait aux exportations de riz. 13 % de 37,9 donne 4 927 000 dollars.

En 2015, la tonne de riz coutait 380 dollars environ.

Ainsi : $\dfrac{4\ 927\ 000}{380} = 12\ 966$ tonnes environ.

2. Les problèmes DUDU

La moyenne générale de Julien est de 13,5. Connaissant toutes les autres notes, on peut retrouver celle de mathématiques : 18,2.

Julien avait donc une meilleure moyenne que son frère.

chapitre 8

Les transformations du plan : translation et rotation

I. Programme

Thème D – Espace et géométrie

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (relations entre angles et parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, caractérisation de la médiatrice, théorèmes de Thalès et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en œuvre d'un raisonnement. Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie.

Attendus de fin de cycle

- Représenter l'espace.
- Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
■ **Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique.** ■ **Coder une figure.** ■ **Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.**	■ Construire des frises, des pavages, des rosaces. ■ Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie. ■ Faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation.

** En **gras** : ce qui est traité dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

Les quatre transformations : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation seront vues, définies et pratiquées à la fin du cycle 4 du collège.

La symétrie axiale puis la symétrie centrale sont les premières transformations étudiées au collège.

Dans ce chapitre, les élèves découvrent deux nouvelles transformations : la translation et la rotation.

La translation est l'appellation mathématique de ce que l'on appelle communément un déplacement. Lorsque l'on se déplace, on fait un mouvement dans une certaine direction sur une certaine distance : autrement dit, on se déplace selon un certain vecteur. Le mot vecteur n'est pas un attendu du programme et nous avons donc plutôt choisi de parler d'une translation qui transforme un point A en un autre point B. Néanmoins, la flèche de A à B sera dans la plupart des cas représentée.

Une rotation fait pivoter les figures ou les formes autour d'un point. Les angles orientés n'étant pas au programme du cycle 4, nous utiliserons l'expression « tourner dans le sens (contraire) des aiguilles d'une montre ».

Les compétences qui entrent en jeu sont essentiellement les compétences : modéliser, représenter, raisonner. Il est

recommandé de faire comprendre aux élèves l'effet d'une transformation.
Par conséquent, nous n'insisterons pas sur les propriétés : la translation et la rotation sont des isométries qui conservent tout ce qui est parallélisme et orthogonalité, angles, …

Mais nous privilégierons les constructions sur papier ou sur logiciel.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	Fichiers textes modifiables des activités ■ Activité 2 : Figure dynamique ■ Activité 4 : Figure dynamique
Objectif 1 **Objectif 2**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Construire l'image d'un point par une translation ■ Exercice 6 : Figure dynamique ■ Exercice 8 : Figure dynamique ■ Vidéo « *Je comprends* » : Construire l'image d'un point par une rotation ■ Exercice 16 : Figure dynamique
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours ■ Exercice 34 : Figure dynamique
Je résous des problèmes	■ Exercice 38 : Figure dynamique ■ Exercice 39 : Figure dynamique ■ Exercice 40 : Figure dynamique ■ Exercice 43 : Figure dynamique ■ Exercice 50 : Figure dynamique ■ Exercice 51 : Figure dynamique
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Figure dynamique ■ Activité 2 : Figure dynamique ■ Activité 3 : Programme Scratch pour les enseignants ■ Activité 3 : Programme Scratch pour les élèves Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et tableur) et leurs tutoriels vidéos
Les problèmes DUDU	■ Vidéos : Les DUDU et le pavage « Pavarêve »

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Établir le lien entre un glissement et une translation

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Le schéma du téléphérique est exploité pour introduire et illustrer la notion de translation.

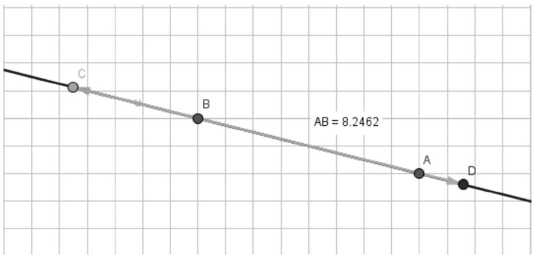
Une translation déplace tous les points d'un objet géométrique de la même distance, selon la même direction et dans le même sens, c'est-à-dire suivant un même vecteur. Mais seule la flèche d'un point à un autre sera schématisée pour comprendre l'effet du glissement.

La piste travail en autonomie sur une feuille quadrillée est à privilégier pour cette activité. Comme la notion est nouvelle, le professeur soignera la restitution au tableau.

Si possible, vidéoprojeter une feuille à carreaux, à l'aide d'un visualiseur par exemple.

• *Correction*

1.



2. a. La droite (AB).
b. De A vers B.
c. Distance AB, AB ≈ 8,25.
5. Le dessin en position 4 est l'image du dessin en position 3 par la translation qui transforme C en D.

Activité 2. Utiliser un logiciel de géométrie pour construire et étudier l'image d'un triangle par une translation

• Considérations didactiques et mise en pratique

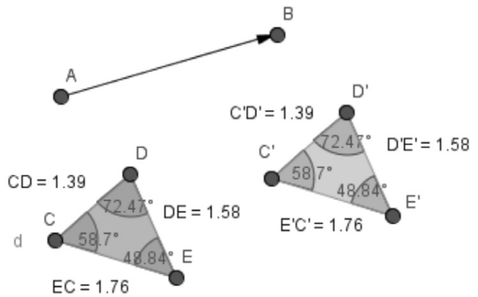
L'activité permet de mettre en place la notion de translation avec un logiciel de géométrie dynamique. C'est le moment de visualiser un triangle, son image par translation et d'observer quelques caractéristiques d'une telle transformation (la translation conserve les formes et les longueurs). L'avantage d'un logiciel tel que GeoGebra est de pouvoir déplacer les sommets du triangle C, D, E, mais aussi les points du « vecteur »-translation A et B, afin d'étudier un maximum de possibilités de position des points A et B.

Face à cette nouvelle transformation, le professeur devra indiquer aux élèves comment utiliser le menu «translation» du logiciel. Puis les élèves devant leur poste informatique (ou tablette, ou ordinateur portable) devront comprendre l'effet d'une translation d'un triangle en manipulant, déplaçant le triangle ou les points A et B.

La partie C demandera un temps d'échange avec tous les élèves de la classe.

• Correction

A.



B. 3. a. On constate que CD = C′D′ ; DE = D′E′ ; CE = C′E′.

b. On constate que : $\widehat{CDE} = \widehat{C'D'E'}$; $\widehat{DEC} = \widehat{D'C'E'}$ et $\widehat{EDC} = \widehat{E'D'C'}$.

c. On peut conjecturer qu'une translation conserve les angles, les longueurs et les formes.

C. Si les points A et B sont confondus (trois sommets communs), les triangles sont superposables.

On peut aussi avoir un sommet commun lorsque A et B sont placés à la même distance, direction et sens que deux sommets du triangle CDE.

On ne peut pas avoir deux sommets communs.

Activité 3. Transformer un point par rotation

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité est extraite de l'épreuve PISA 2012. Pour donner du sens à cette nouvelle transformation : la rotation et introduire le vocabulaire, on va s'intéresser au déplacement d'un point sur une roue qui tourne. La variable temps sert à visualiser l'emplacement de la nacelle dans la durée. La trajectoire de la nacelle illustre le mouvement de rotation dans le sens des aiguilles d'une montre.

Cette activité ne nécessite aucun matériel particulier. Les élèves devront développer leur autonomie, mais aussi le sens du travail collaboratif lors de la correction. Le professeur en vidéoprojetant la roue (ou après une reproduction au tableau) pourra répondre plus facilement aux questions des élèves.

• Correction

1. a. Au bout de 20 minutes, Patrick sera au point R. Il aura tourné de 180°.

b. La rotation de centre M et d'angle 180° transforme le point P en R.

c. Le point R est aussi l'image du point P par la symétrie centrale de centre M.

2. a. Au bout de 30 minutes, Patrick est au point S. Il a tourné de 270°.

b. La rotation de centre M et d'angle 270° transforme le point P en S.

3. La rotation de centre M et d'angle 90° transforme le point P en Q.

Activité 4. Utiliser un logiciel de géométrie pour expérimenter et conjecturer

• Considérations didactiques et mise en pratique

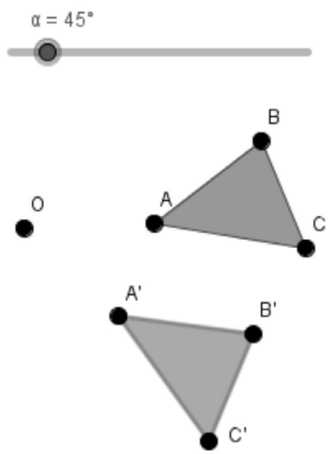
Dans le cadre de cette activité, les élèves vont utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour transformer une figure par rotation. Le curseur permet de varier l'angle de rotation de 0 à 360°. Ainsi l'élève peut effectuer des conjectures sur l'image du triangle en fonction de cet angle de rotation.

Dans la partie B, on profite de l'outil pour comparer un triangle et son image par rotation, en variant les paramètres : sommets du triangle, centre et angle de la rotation.

L'élève met en pratique les compétences manipuler et représenter. En binôme devant un ordinateur, c'est le moment de faire preuve d'initiative, de comprendre et mémoriser une nouvelle notion. Une synthèse collective clôturera la séance et permettra d'institutionnaliser le vocabulaire.

• Correction

A.



B. 4. Pour $\alpha = 0°$ et $\alpha = 360°$, les triangles sont superposables.
5. a. Vrai ; **b.** Vrai ; **c.** Vrai.

Objectif 1. Transformer un point ou une figure par translation

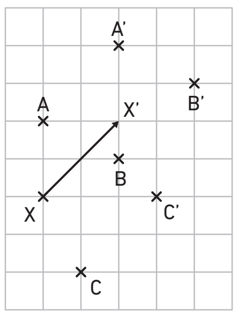
Je m'entraine

1 **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Vrai ; **d.** Vrai.

2 Le point M′ est l'image du point M par la translation qui transforme A en A′.
La Figure 2 est l'image de la Figure 1 par la translation qui transforme A en A′.

3 **a.** La Figure 2 est l'image de la Figure 1 par la translation qui transforme le point B en E.
b. La Figure 3 est l'image de la Figure 2 par la translation qui transforme le point E en C.
c. La Figure 3 est l'image de la Figure 1 par la translation qui transforme le point B en C.

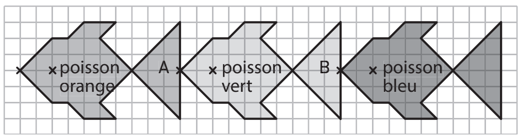
4



Je résous des problèmes simples

5 **a.** OHGF ; **b.** OJIH ; **c.** OLKJ.

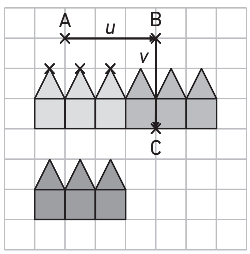
6 **1.**, **2.** et **3.**



4. Les poisons bleu et orange sont de chaque côté du poisson vert.
5. Le poisson orange est l'image du poisson bleu par la translation qui transforme deux fois le point B en A.

7 **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Vrai.

8



9 **1.** La poutre se situe au point R.
2. La poutre se situe au point S.
3. a. On obtient T par une translation qui transforme le point O en T.
b. La poutre atteint une hauteur maximale de 24 m en 50 s.

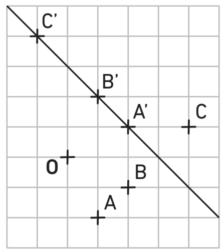
10 **1.** Le triangle JLK est l'image du triangle DEF par la translation qui transforme le point E en L.
2. Le triangle GHI est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme le point C en I.

Objectif 2. Transformer un point ou une figure par rotation

Je m'entraine

11 **a.** Faux ; **b.** Vrai ; **c.** Vrai ; **d.** Vrai.

12 **1.** Constructions :



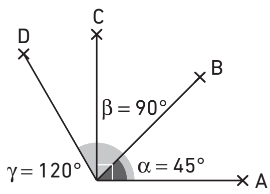
2. Les points A′, B′ et C′ sont alignés.

13 **a.** de centre 0 et d'angle 60° ;
b. de centre O et d'angle 120° ;
c. de centre O et d'angle 60° ;
d. de centre O et d'angle 240°.

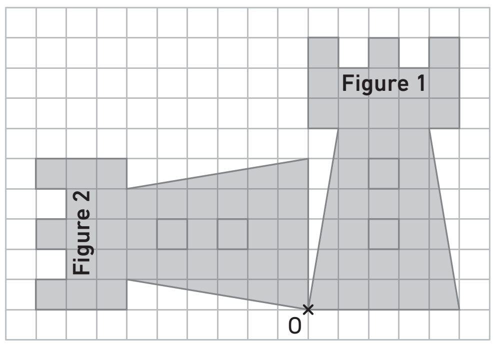
14 Vrai. Il sera 7h.

Je résous des problèmes simples

15



16 **1.** et **2.**



3. La Figure 3 sera l'image de la Figure 1 par la symétrie centrale de centre 0.

17

Effectuer une rotation de la figure 1 de centre O et d'angle 100°.	Figure 3
Effectuer une rotation de la figure 1 de centre O et d'angle 50°.	Figure 2
Effectuer une rotation de la figure 1 de centre O et d'angle 150°.	Figure 4

18 Vrai.

19 **1. a.** On obtient le même carré. **b.** Idem.
2. La rotation de centre le centre du cercle circonscrit (qui est aussi le centre de gravité) et d'angle 60° rend invariant un triangle équilatéral.

20 **a.** partie rouge ; **b.** partie rouge ;
c. partie verte ; **d.** partie rouge.

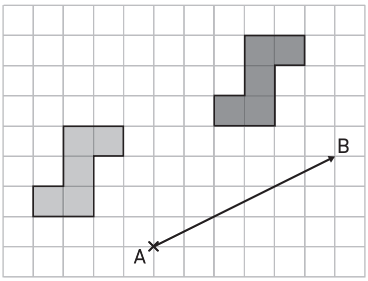
Je travaille seul(e)

21 **B.** **22** **C** **23** **A** **24** **C** **25** **C**

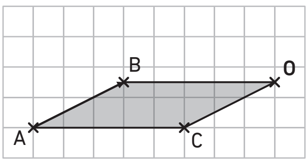
26 **1.** Le point F ; **2.** le point D.

27 **a.** C ; **b.** B ; **c.** E ; **d.** B ; **e.** F.

28



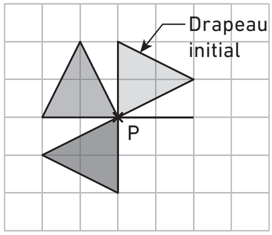
29 **1.** et **2.**



3. ABDC est un parallélogramme.
4. Pour que ABDC soit un carré, il faut que $AB = AC$ et $\widehat{ABD} = 90°$.

30 **1.** Le point A est l'image du point D par la translation qui transforme le point D en A.
2. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ARD rectangle en D : $AR \approx 17{,}49$ m.

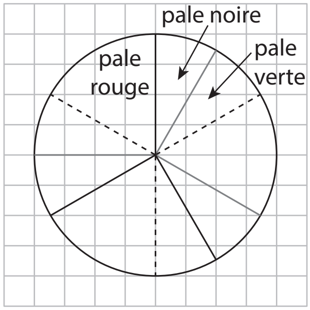
31 **1.** et **2.**



32 Faux, AM=AN et $\widehat{NAM} = 40°$.

33 **a.** C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
b. Le point C n'est pas l'image du point B.
c. C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

34 **1. a.**



1. b. Un quart de tour ; **c.** un demi-tour.
2. La rotation de centre le centre du rotor et d'angle 90°.
3. La rotation de centre le centre du rotor et d'angle 180°.
4. Une rotation de centre le centre du rotor et d'angle $360 \times 2 = 720°$.

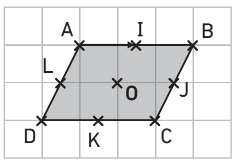
Je résous des problèmes

35 Le chiffre 6.

36 **1.** La translation qui transforme le point A en B et celle qui transforme le point B en C.
2. La translation qui transforme la moitié de la distance du point A vers le point B et celle qui transforme la moitié de la distance du point B vers le C.

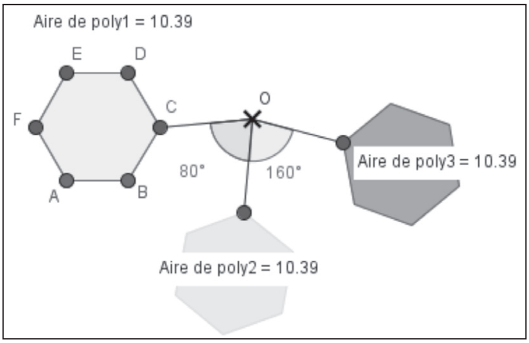
37 **1.** Lou.
2. Nathan a effectué une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre et le codage de Quentin contient une erreur.

38 **1.**



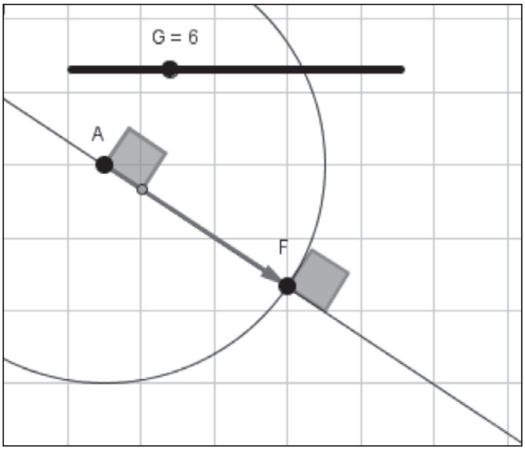
2. Image par T de I : B ; image par T de D : K ; image par T de K : C ; image par T de L : O et image par T de O : J.

39 **1.**, **2.** et **3.**



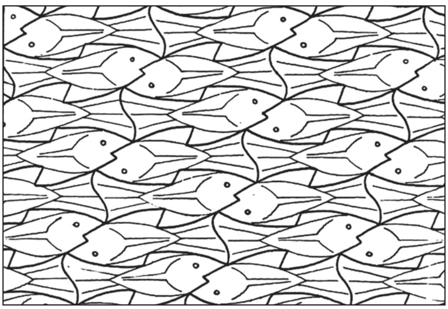
4. Une figure et son image obtenue par translation ont la même aire.

40 **Étape 1 :** Construire la droite, le carré posé sur la droite et le curseur G allant de 2 à 10 par exemple.
Étape 2 : Créer un cercle de centre A et de rayon G, puis le point F intersection du cercle et de la droite.
Étape 3 : Créer l'image du carré par la translation allant de A vers F.
Étape 4 : Cacher le carré initial et animer le curseur.

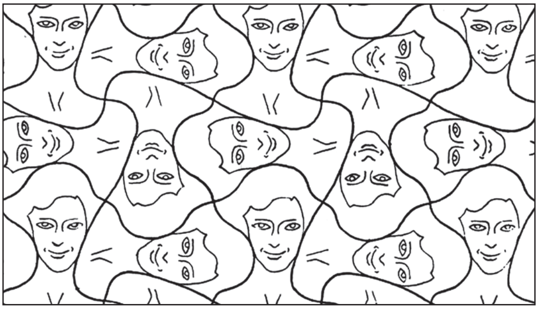


41 Exemples de pavage :

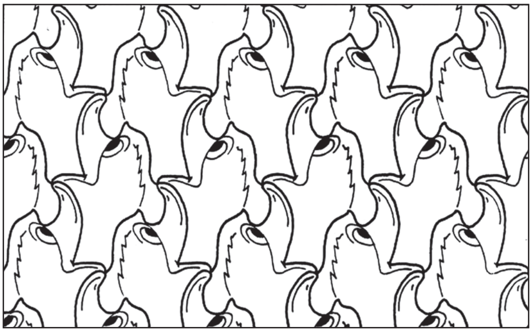
• Pavage poisson



• Pavage Visage



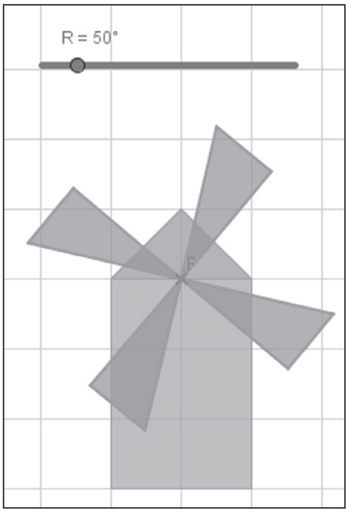
• Pavage Donald



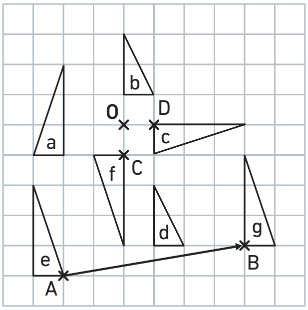
42 Le point A′ est l'image de A par la translation verticale de longueur 10 cm.

B′ est l'image de B par la rotation de centre 0 et d'angle environ 114,65°.

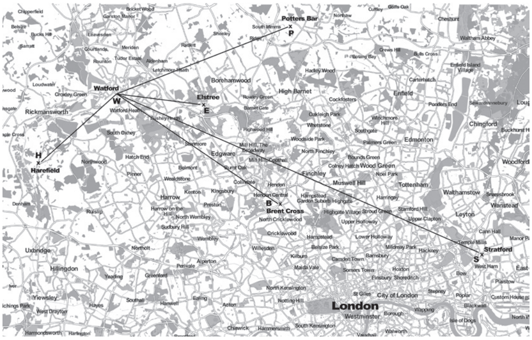
43 Suivre les indications pas à pas pour faire tourner les ailes du moulin.



44 **1.** Le triangle g est l’image du triangle e par la translation qui transforme le point A en B.
2. Le triangle c est l’image du triangle f par la rotation de centre O et d’angle 90°.



45 **1. a.** Carte finale :



1. b. L représente London.
3. Non, Mary ne sera pas au bord de la Tamise. Elle sera entre London et Stratford.

46 **a.** Translation ; **b.** Rotation ; **c.** Rotation.

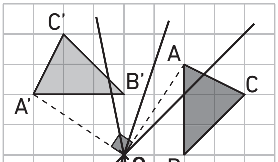
47 **1.** Oui.
2. Non.
3. Translations successives qui transforment : R en E, puis R en S et enfin R en E.

48 Angle de la rotation : 60°.

49 **a.** 15° ; **b.** 131 400°.

Devoirs à la maison

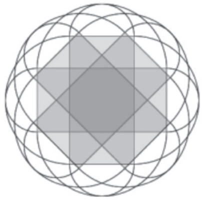
50 **1.**



2. Les trois médiatrices se coupent en un seul point : le centre de la rotation .
3. 90°

4. Le triangle bleu est l’image du triangle vert par la rotation de centre O et d’angle 90°.

51 Suivre pas à pas les étapes de construction pour arriver à la rosace finale.

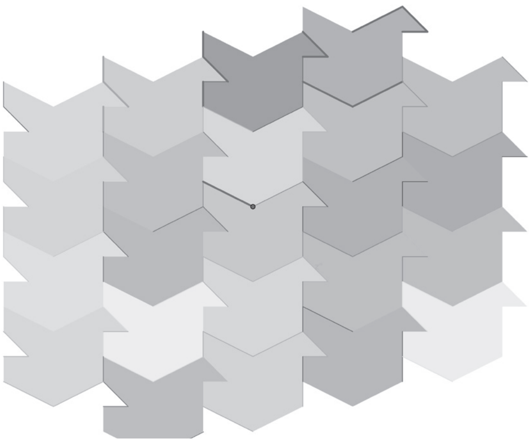


Avec un logiciel

Activité 1. Une mosaïque d’oiseaux

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Pour certains artistes, le lien entre les mathématiques et les arts est apparent, voire même flagrant ! C’est le cas pour Maurits Cornelis Escher dont la plupart des œuvres exploitent certains concepts mathématiques, en particulier les transformations. Dans cette activité, on va reproduire son tableau *Regular Division of the Plane with Birds*. Cette œuvre présente une série de translations. Avec un logiciel de géométrie, les élèves créent d’abord un motif, puis réalisent le pavage à l’aide du déplacement / glissement de la figure de base dans deux directions données. Les flèches de K à L et de L en M représentent ces deux translations à exécuter plusieurs fois de suite sur les différents « nouveaux » oiseaux.
Voici un exemple de pavage à réaliser sur un logiciel de géométrie dynamique. Mais travailler sur papier est aussi envisageable et peut être intéressant lors d’un travail collaboratif. Une fois agrandie et imprimée, l’œuvre pourra égayer les murs de la classe !

• ***Correction***
Suivre pas à pas les étapes de construction pour arriver au pavage d’oiseaux.



Activité 2. Constructions de rosaces

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Deux transformations sont nécessaires pour réaliser la rosace : la symétrie axiale, puis un enchainement de rotations. L'objectif principal est la réalisation de cette rosace : les élèves approfondissent la manipulation des outils symétrie et rotation du logiciel GeoGebra, puis s'interrogent sur leurs effets.

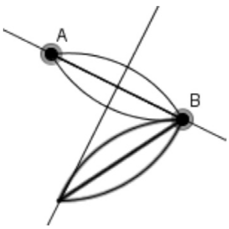
L'objectif dans la dernière question est de comprendre le lien entre le nombre de pétales de la rosace et l'angle de rotation.

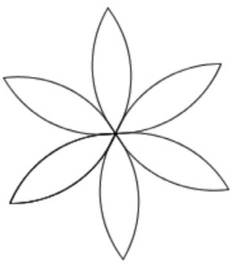
Cette activité est conçue pour être réalisée à l'aide d'un logiciel (en binôme par exemple). Un groupe en parallèle peut effectuer la construction sur papier. En exploitant la compétence « communiquer à l'écrit et à l'oral », chaque groupe (logiciel ou papier) peut présenter la réalisation de son travail, afin de confronter les avantages de chaque méthode.

• *Correction*

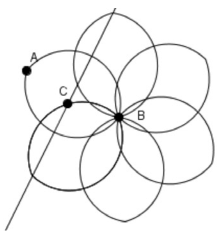
1. à **5.** Suivre pas à pas les étapes de construction pour arriver à la rosace.

6.

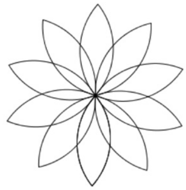




9. Rosace avec une autre position de C :



10. Rosace à 10 pétales avec une rotation d'angle 36° :



Activité 3. Une couronne carrée

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Voici un autre outil pour réaliser un dessin : le logiciel de programmation Scratch.

Les élèves vont programmer un enchainement important de rotations d'un carré. Quel dessin vont-ils obtenir au final ? Les élèves pourront apprécier la rapidité de l'exécution et en même temps, se perfectionner dans la partie E Algorithme et programmation (variable, boucle répéter, mouvement, fonction).

Dans la question **5**, l'élève va conjecturer les effets sur la couronne finale en modifiant trois paramètres : la longueur du carré, le nombre de rotations et l'angle de rotation.

Les élèves téléchargent le fichier de départ contenant le lutin araignée, l'arrière-plan et le bloc « carré » qui donne les instructions au lutin pour tracer un carré de côté variable, puis replacent le lutin au centre du carré.

• *Correction*

1. et **2.**

3. a. Longueur : 200.

b. Nombre de rotations de carrés effectuées dans le programme : 45

c. Angle de rotation : 2°.

d. Le carré admet quatre axes de symétries (un axe : une rotation d'angle 180° suffit, …, 4 axes : une rotation d'angle 45° suffit).

4. Elle a la forme d'une couronne.

5. Si l'on augmente la longueur du carré, la couronne est plus grande mais les carrés moins espacés.

Si l'on augmente le nombre de rotations, l'araignée va repasser sur sa couronne déjà tissée.

Si l'on augmente l'angle de rotation, la couronne n'est plus visible : les carrés sont simplement « empilés ».

■ Tâches complexes

1. Au confluent de l'art et des mathématiques

– En longueur (en cm): on a besoin de $\frac{2\,000}{10\sqrt{2}} \approx 141{,}42$, soit 142 carreaux.

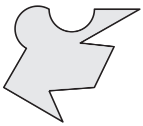
– En largeur (en cm): on a besoin de $\frac{150}{10\sqrt{2}} \approx 10{,}6$ soit 11 carreaux.

Au total, $142 \times 11 = 1\,562$ carreaux seront nécessaires.

Au maximum, $142 \times 2 + 11 \times 2 = 304$ carreaux seront tronqués.

2. Les DUDU et le pavage « Pavarêve »

Voici le motif de base :



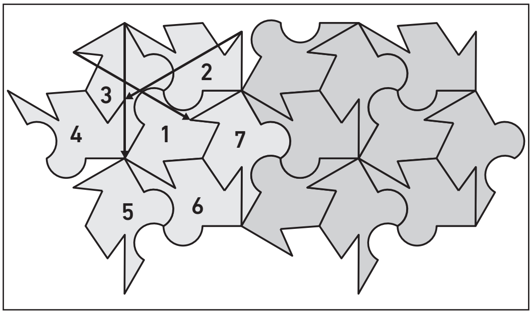
– **Étape 1 :** On construit l'image de la figure 1 par la rotation de centre K et d'angle 120° et 240°.
On obtient les figures 1, 2 et 3.

– **Étape 2 :** On construit l'image de la figure 4 image de la figure 1 par la translation de couleur orange. On obtient la figure 4.

– **Étape 3 :** On construit l'image des figures 2 et 3 par la translation de couleur violette. On obtient les figures 5 et 6.

– **Étape 4 :** On construit l'image de la figure 3 par la translation de couleur verte.

– **Étape 5 :** On réitère ce processus, l'enchainement de rotations et de translations pour obtenir le pavage Pavarêve.



chapitre 9

Théorème de Pythagore

I. Le programme

Thème D – Espace et géométrie

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (relations entre angles et parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, caractérisation de la médiatrice, théorèmes de Thalès et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en œuvre d'un raisonnement. Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie.

Attendus de fin de cycle

- Représenter l'espace
- Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
■ Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. ■ Coder une figure. ■ Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure. ■ **Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture*.** – Position relative de deux droites dans le plan. – Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes / internes. – Médiatrice d'un segment. – Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables, hauteurs, rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente). – Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales. – Théorème de Thalès et réciproque. – Théorème de Pythagore et réciproque.	■ Construire des frises, des pavages, des rosaces. ■ Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie. Faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation. ■ Distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure. ■ Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité. ■ Utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles. ■ Démontrer, par exemple, que des droites sont parallèles ou perpendiculaires, qu'un point est le milieu d'un segment, qu'une droite est la médiatrice d'un segment, qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré. ■ Étudier comment les notions de la géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Eratosthène, distance de la Terre à la Lune par Lalande et La Caille, etc.).

** En* ***gras*** *: ce qui est traité dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en œuvre d'un raisonnement.

La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès le début et tout au long du cycle 4, permettant aux élèves de s'entraîner au raisonnement et de s'initier petit à petit à la démonstration. Le théorème de Pythagore est introduit dès la quatrième, et est réinvesti tout au long du cycle dans des situations variées du plan et de l'espace.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Écrire l'égalité de Pythagore ■ Vidéo « *Je comprends* » : Appliquer la formule de Pythagore (1) et (2) ■ Vidéo « *Je comprends* » : Appliquer la formule de Pythagore (3) et (4)
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Figure dynamique ■ Activité 2 : Figure dynamique ; Tableur ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU préparent les cadeaux

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Découvrir l'égalité de Pythagore

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Les variables (longueurs) de la feuille de géométrie dynamique sont directement exploitables dans la fenêtre du tableur. L'avantage est d'avoir à disposition un outil de calcul performant, intuitif et très simple à utiliser.

Après avoir réalisé la figure dynamique, on complète la feuille de calcul par un tableau présentant les carrés des côtés du triangle. La propriété de Pythagore peut alors être aisément conjecturée.

Le dynamisme de la figure permet à partir d'un triangle quelconque de s'approcher du cas limite qui est ici le triangle rectangle. On constate ainsi qu'on approche l'égalité sur les carrés des côtés lorsque l'on tend vers ce cas limite.

Cette activité peut être réalisée avec la version 3.0 (ou supérieure) de GeoGebra qui intègre un tableur. Il est préférable que les élèves ne soient pas novices dans l'utilisation d'un tableur. La construction de la figure est relativement aisée.

• *Correction*

L'activité mène à conjecturer l'égalité de Pythagore.

Activité 2. Calculer une longueur d'un côté d'un triangle rectangle

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Cette activité a pour objectif de présenter une application de l'égalité de Pythagore en se dégageant de tout formalisme. L'exercice propose une situation concrète issue de la vie quotidienne : le charpentier use du théorème de Pythagore pour calculer des longueurs dans la charpente d'une maison. La méthode de résolution passe par un programme de calcul. Il faudra traiter autant d'exemples numériques que nécessaire avant de faire découvrir la formule. Celle-ci pourra également être introduite à l'aide du programme de calcul :

– Soit une longueur du triangle : x
– Calcule le carré de cette longueur : x^2
– etc.

• *Correction*

2. AC = 6,5 m.
3. La longueur de la poutre est environ égale à 6,4 m.

Activité 3. Démontrer qu'un triangle est rectangle

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Cette activité comme la suivante a pour objectif d'appliquer l'égalité de Pythagore pour démontrer qu'un triangle est rectangle ou non.

Il est important de bien distinguer le contexte d'application de la propriété : dans la situation de l'activité, toutes les longueurs du triangle sont connues, il ne s'agit donc pas de calculer une longueur manquante. À ce niveau, la confusion est encore bien présente chez beaucoup d'élèves. Il faut également insister sur le choix du carré à « calculer seul » : si hypoténuse il y a, c'est nécessairement le plus grand côté du triangle. C'est donc cette longueur qu'il faudra « calculer seule ».

• ***Correction***

On constate que l'égalité de Pythagore est vérifiée dans les deux situations de l'exercice.

Activité 4. Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Cette activité a pour objectif d'appliquer l'égalité de Pythagore pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle. Comme pour l'activité précédente, il est important de bien distinguer le contexte d'application de la propriété : dans la situation de l'activité, toutes les longueurs du triangle sont connues, il ne s'agit donc pas de calculer une longueur manquante. À ce niveau, la confusion est encore bien présente chez beaucoup d'élèves.

Il faut également insister sur le choix du carré à « calculer seul » : si hypoténuse il y a, c'est nécessairement le plus grand côté du triangle. C'est donc cette longueur qu'il faudra « calculer seule ».

• ***Correction***

4. $EF^2 = 67{,}24$; $DF^2 + DE^2 = 33{,}64 + 42{,}25 = 75{,}89$.

5. On constate que l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée. Le triangle DEF est quelconque.

■ Objectif 1. Caractériser le triangle rectangle par l'égalité de Pythagore

Je m'entraine

1 **a.** 9 **b.** 100 **c.** 81 **d.** 41 **e.** 58 **f.** 117

2 **a.** 16 **b.** 64 **c.** 90

3 $A = 383{,}09$ $B = 168{,}8301$ $C = 12{,}9525$ $D = 2\,700$

4 **a.** AB **b.** GH

5 Triangle ABC d'hypoténuse AB ; triangle ABD d'hypoténuse DB ; triangle BDE d'hypoténuse DE ; triangle AFC d'hypoténuse AC ; triangle BFC d'hypoténuse BC.

6 **1.** [AC]

2. $AC^2 = AB^2 + BC^2$

7 $BC^2 = AB^2 + AC^2$

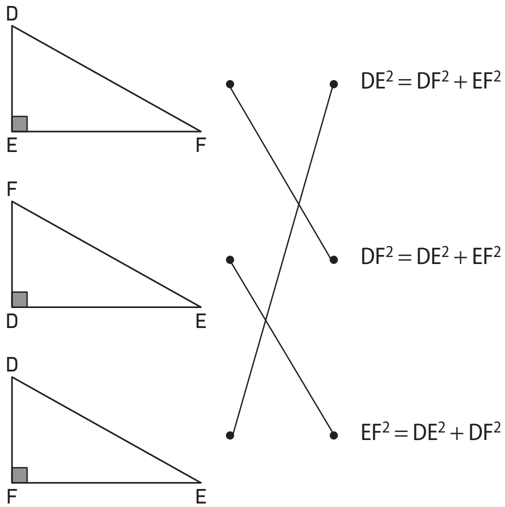
Je résous des problèmes simples

8 $AD^2 = AH^2 + HD^2$

$DE^2 = DH^2 + HE^2$

$AE^2 = AD^2 + DE^2$

9



10

Triangle rectangle	ABC
Hypoténuse	AB
Carré de l'hypoténuse	AB^2
Somme des carrés des deux autres côtés	$BC^2 + AC^2$
Égalité de Pythagore	$AB^2 = BC^2 + AC^2$

Triangle rectangle	DEF
Hypoténuse	EF
Carré de l'hypoténuse	EF^2
Somme des carrés des deux autres côtés	$DE^2 + DF^2$
Égalité de Pythagore	$EF^2 = DE^2 + DF^2$

Triangle rectangle	GHI
Hypoténuse	HI
Carré de l'hypoténuse	HI^2
Somme des carrés des deux autres côtés	$IG^2 + GH^2$
Égalité de Pythagore	$HI^2 = IG^2 + GH^2$

Triangle rectangle	KLH
Hypoténuse	KL
Carré de l'hypoténuse	KL^2
Somme des carrés des deux autres côtés	$KH^2 + HL^2$
Égalité de Pythagore	$KL^2 = KH^2 + HL^2$

Triangle rectangle	GHK
Hypoténuse	HK
Carré de l'hypoténuse	HK^2
Somme des carrés des deux autres côtés	$KG^2 + GH^2$
Égalité de Pythagore	$HK^2 = KG^2 + GH^2$

11 **1.** $26^2 = 10^2 + 24^2$
2. $20^2 = 12^2 + 16^2$
3. $10^2 = 6^2 + 8^2$

12 **1.** L'élève a construit un triangle MOP rectangle en P.
2. L'élève a construit un triangle CSD rectangle en D.

13 Le garçon va mesurer les côtés de l'équerre et calculer les carrés de ces longueurs pour vérifier l'égalité de Pythagore.

14 **a.** $ML^2 = MH^2 + HL^2$
b. $GF^2 = GD^2 + DF^2$

Objectif 2. Calculer une longueur d'un côté d'un triangle rectangle

Je m'entraine

15 **1. a.** 4 **b.** 11 **c.** $\approx 1,90$
Les élèves pourront utiliser la calculatrice pour obtenir le résultat de **c.**
2. a. 5 cm **b.** 10 cm **c.** 13 cm **d.** 50 cm

16 **a.** 9 **b.** 3 **c.** $\approx 2,53$ **d.** $\approx 2,21$
Les élèves utiliseront la calculatrice pour obtenir le résultat de **c.** et **d.**

17 **a.** 3,61 **b.** 6,71 **c.** 8,11 **d.** 2,63

18 **a.** 2,2 **b.** 3,8 **c.** 9,3 **d.** 7,5

19 NP = 7,5 cm.

20 AB = 10 cm.

21 **Triangle ABC :** AB ≈ 5,8 cm. **Triangle DEF :** DF ≈ 4,3 cm. **Triangle GHI :** GI ≈ 3,5 cm. **Triangle JKL :** JL ≈ 7,6 cm.

Je résous des problèmes simples

22 Les diagonales mesurent environ 11,3 cm.

23 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. Dans un triangle isocèle, la hauteur et la médiatrice issues du sommet principal sont confondues.
3. La hauteur mesure environ 4,9 cm.
4. L'aire du triangle est environ égale à 17,15 cm^2.

24 Environ 136 m.

25 **1.** Largeur = 27 cm.
2. Diagonale ≈ 55 cm ≈ 21,65 pouces.

26 Environ 14 m.

27 **1.** 4,3 cm.
2. 10,75 cm^2.

28 $2,236 \times 4 + 4,243 \times 2$. Le périmètre de LCOEUR est environ égal à 17,4.

29 **a.** 10 cm **b.** 25 cm **c.** 130 cm **d.** 6,5 cm

Objectif 3. Démontrer qu'un triangle est ou n'est pas rectangle

Je m'entraine

30 **a.** non rectangle.
b. rectangle.
c. rectangle.
d. non rectangle.

31 **1.** $6^2 = 36$ et $3^2 + 4^2 = 25$.
2. Le triangle n'est pas rectangle.

32 **a.** $12^2 + 5^2 = 169$ et $13^2 = 169$.
b. $3,3^2 + 4,4^2 = 30,25$ et $5,5^2 = 30,25$.

33 **1.** $6^2 + 11,2^2 = 161,44$ et $13^2 = 169$.
2. $2,8^2 + 4,5^2 = 28,09$ et $5,5^2 = 27,04$.

34 $4,8^2 + 2^2 = 27,04$ et $5,2 = 27,04$.
Le triangle MNP est rectangle en N.

35 $6^2 + 5^2 = 61$ et $9^2 = 81$.
Le triangle RST n'est pas rectangle.

Je résous des problèmes simples

36 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. Le triangle IJK semble être rectangle en I.
3. En réalité, le triangle IJK n'est pas rectangle. L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée :
$JK^2 = 13,69$ et $IJ^2 + IK^2 = 11,56 + 1,44 = 13$

37 **1.** $3,3^2 + 5,6^2 = 42,25$ et $6,5^2 = 42,25$.
2. Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, alors c'est un losange donc ABCD est un losange.

38 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. Le triangle RST semble rectangle en T.
3. $RT^2 + ST^2 = 46,24$ et $RS^2 = 46,24$.

39 $8,5^2 = 72,25$ et $7,7^2 + 3,5^2 = 71,54$.
Le parallélogramme n'est pas un rectangle.

40 $28^2 + 45^2 = 2\,809$ et $53^2 = 2\,809$
Le terrain a la forme d'un triangle rectangle.

41 $1,3^2 = 1,69$ et $0,66^2 + 1,12^2 = 1,69$
Le piquet est perpendiculaire au sol.

42 $6{,}6^2 = 43{,}56$ et $3{,}3^2 + 5{,}6^2 = 42{,}25$.
Le terrain n'est pas rectangulaire.

43 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. $MN^2 = 26{,}01$ et $MO^2 + ON^2 = 19{,}22$.
Le triangle n'est pas rectangle.

■ Je travaille seul(e)

44 B **45** C **46** B **47** A **48** C

49 **a.** $AC^2 = AB^2 + BC^2$
b. $EG^2 = EF^2 + FG^2$
c. $HJ^2 = HI^2 + IJ^2$

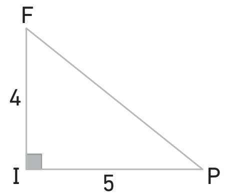
50 **1.** 3
2. $BC^2 = AB^2 + AC^2$; $AB^2 = BD^2 + AD^2$; $AC^2 = AD^2 + DC^2$

51 $CD^2 = CA^2 + AD^2$; $CA^2 = CM^2 + MA^2$; $AD^2 = AM^2 + MD^2$

52 **a.** MT = 3,4 cm. **b.** AB = 7,2 cm.

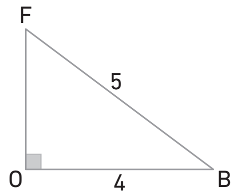
53 HK = 5,2 cm.

54 **1.**



2. PF ≈ 6,4 cm.

55 **1.**



2. OF ≈ 4,47 cm.

56 **1.** $FE^2 = 28{,}8$. **2.** BE ≈ 6,8 cm.

57 **1.** OH ≈ 2,4 cm. **2.** MH ≈ 3,2 cm.
3. L'aire du triangle MON est environ égale à 10,4 cm^2.

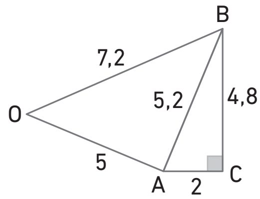
58 BC = 58 m.

59 **a.** $10{,}9^2 = 118{,}81$ et $6^2 + 9{,}1^2 = 118{,}81$.
b. $10{,}6^2 = 112{,}36$ et $9^2 + 5{,}6^2 = 112{,}36$.

60 **a.** $14^2 = 196$ et $12^2 + 5^2 = 169$.
b. $8^2 = 64$ et $7^2 + 2{,}4^2 = 54{,}76$.

61 $13{,}6^2 = 184{,}96$ et $12^2 + 6{,}4^2 = 184{,}96$.
Le triangle RST est donc rectangle en S.

62 **1.**



2. $5{,}2^2 = 27{,}04$ et $2^2 + 4{,}8^2 = 27{,}04$.
Le triangle ABC est donc rectangle en C
3. Voir schéma. **4.** $7{,}2^2 = 51{,}84$ et $5^2 + 5{,}2^2 = 52{,}04$.
Le triangle AOB est donc rectangle en A.

63 **1.** BE = 2,7 **2.** $BC^2 = 13{,}54$ **3.** $AB^2 + BC^2 = 33{,}79$ et $AC^2 = 37{,}21$. Le triangle ABC n'est pas rectangle.

■ Je résous des problèmes

64 Joan suppose dès le départ que $BE^2 = CB^2 + CE^2$, or c'est ce qu'il faut démontrer. Les calculs doivent être séparés.

65 Ibrahim applique dès le début la propriété de Pythagore, ce qui suppose que le triangle ABC est rectangle, or c'est ce qu'il faut démontrer.

66 **1.** $4^2 = 16$ et $1{,}2^2 + 3{,}5^2 = 13{,}69$.
Le triangle ANB n'est pas rectangle.
$4^2 = 16$ et $3{,}2^2 + 2{,}4^2 = 16$.
Le triangle AMB est rectangle en M.
2. On constate que les points A, M et B sont équidistants du point O.

67 Les carrés des côtés du triangle sont égaux à : 10, 73 et 81.
$81 \neq 73 + 10$. Le triangle n'est pas rectangle.

68 **1.** SB = 2,8 m. **2.** S'B' = 0,7 m.
3. 2,1 m. **4.** Environ 8 min.

69 Hauteur : 5,95 m.

70 **1.** HM = 5 cm et MB ≈ 9,5 cm , le chemin rouge mesure donc environ 14,5 cm.
2. et **3.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
4. $13^2 + 6^2 = 205$. Le chemin le plus court mesure environ 14,3 cm.

71 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. La symétrie conserve les distances et le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite.
3. $33^2 + 24^2 = 1665$. Le chemin le plus court mesure environ 40,8 m.

72 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. On peut conjecturer que les points S, L et U sont alignés.
3. SL ≈ 4,2802 cm et LU ≈ 5,7201 cm donc SL + LU ≈ 10,0003.
4. SU = 10 cm. Les points S, L et U ne sont donc pas alignés (SU ≠ SL + LU).

Dans les autres matières

73 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. SH $\approx$ 3 m.

74 **1.** La taille de l'écran est de 14 pouces.
2. L'écran a une hauteur d'environ 26,3 cm. Il ne passera pas sous l'étagère.

Jeux mathématiques

75 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. $\sqrt{2},\ \sqrt{4}=2,\ \sqrt{8},\ \sqrt{16}=4,\ \sqrt{32},\ \sqrt{64}=8,\ \sqrt{128}$
3. 14 triangles.

76 Carré de côté $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ cm.

77 On démontre à l'aide de la propriété de Pythagore que le triangle PON est rectangle en O.
M est le milieu de [PN] et I est le milieu de [PO] donc les droites (MI) et (NO) sont parallèles.
Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
On en déduit que le triangle PIM est rectangle en I.

Devoirs à la maison

78 **1.** à **4.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
5. La somme des aires de PIRE et LAID est égale à l'aire de PABO.
6. $c^2 = a^2 + b^2$.

79 **1.** Donc $\pi \times 8{,}5^2 = 72{,}25\pi$ cm² et $\pi \times 7{,}5^2 + \pi \times 4^2 = 72{,}25\pi$ cm².

2. $\pi \times \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \pi\dfrac{a^2}{4}$

et $\pi \times \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + \pi \times \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = \pi\dfrac{b^2}{4} + \pi\dfrac{c^2}{4} = \pi\dfrac{(b^2+c^2)}{4} = \pi\dfrac{a^2}{4}$

Avec un logiciel

Activité 1. Le déménagement

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cet exercice est un problème classique mettant en application la propriété de Pythagore. La plus-value du logiciel est de pouvoir visualiser la situation de façon dynamique et ainsi de conjecturer la solution au problème. En effet, le logiciel permet de lever virtuellement l'armoire en faisant pivoter le rectangle comme on le ferait dans la réalité. En laissant la trace du point E, l'élève pourra en déduire que la solution dépend de la longueur CE (diagonale de l'armoire) et non de la hauteur de l'armoire comme notre intuition pourrait nous le faire croire.
Une fois la conjecture établie, la démonstration est relativement aisée et en fait un exercice facile d'entrée de chapitre.
L'activité est plutôt destinée à des élèves possédant une expérience dans l'utilisation du logiciel. La construction du rectangle peut poser de petites difficultés pour le report des longueurs imposées.

• Correction

La hauteur minimale est d'environ 2,62 m.

Activité 2. Le plus « grand » rectangle

• Considérations didactiques et mise en pratique

L'activité traite d'un problème d'optimisation de périmètre et d'aire. La recherche s'effectue à l'aide du tableur par disjonction des cas. L'élève pourra, selon ses compétences ou celles travaillées en classe, conjecturer la solution depuis le tableau ou depuis les représentations graphiques.
En classe de quatrième, il n'est pas possible de prouver le résultat : le quadrilatère de diagonale 5 cm qui possède le plus grand périmètre et la plus grande aire est un carré. Mais les élèves pourront prouver à l'aide de la propriété de Pythagore que ce carré a pour côté le nombre dont le carré est égal à 2,5.

• Correction

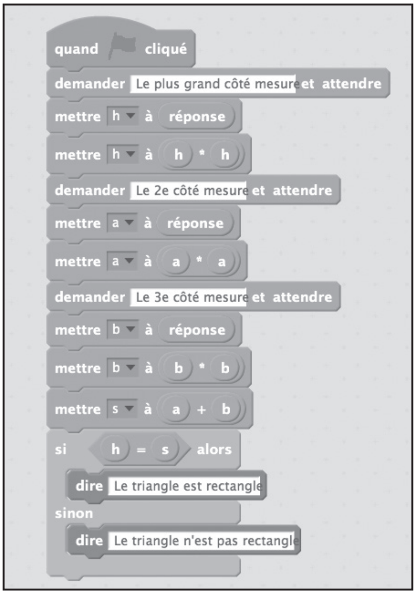
On obtient le périmètre et l'aire maximaux pour un carré de côté environ égal à 3,54 cm.

Activité 3. Pythascratch

• Considérations didactiques et mise en pratique

L'idée de l'activité est de créer un programme permettant d'automatiser à l'aide du logiciel la vérification qu'un triangle soit rectangle ou non.

• Correction



Tâches complexes

1. Le téléphérique

La longueur du téléphérique est proche de 11 km.

2. Les problèmes DUDU

La longueur de ruban nécessaire (sans le débord) est :
$10{,}21 \times 4 + 16{,}55 \times 2 + 18{,}01 \times 2 = 89{,}54$ cm.

chapitre 10

Angles et parallélisme – Triangles semblables

I. Le programme

Thème D – Espace et géométrie

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (relations entre angles et parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, caractérisation de la médiatrice, théorèmes de Thales et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en oeuvre d'un raisonnement. Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie.

Attendu de fin de cycle

■ Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
■ **Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.** **– Position relative de deux droites dans le plan.** **– Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes / internes.** **– Médiatrice d'un segment.** **– Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables, hauteurs, rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente).** – Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales. – Théorème de Thalès et réciproque. – Théorème de Pythagore et réciproque.	■ **Distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure.** ■ **Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité.** ■ **Utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles.** ■ **Démontrer, par exemple, que des droites sont parallèles ou perpendiculaires, qu'un point est le milieu d'un segment, qu'une droite est la médiatrice d'un segment, qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré.** ■ Étudier comment les notions de la géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Eratosthène, distance de la Terre à la Lune par Lalande et La Caille, etc.).

** En **gras** : ce qui est traité dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

« Au cycle 2, l'élève a travaillé sur une géométrie de la perception, partant de l'espace ambiant pour décrire et reproduire des figures planes usuelles, et contrôler leurs propriétés par les sens.
Au cycle 3, l'élève s'est progressivement orienté vers une géométrie où les propriétés des objets sont contrôlées par le recours à des instruments, puis par l'explicitation de ces propriétés.
Au cycle 4, l'élève s'appuie toujours sur une géométrie perçue par les sens et contrôlée par les instruments, mais s'oriente progressivement vers une géométrie où les propriétés des objets sont validées par le raisonnement. Il poursuit et enrichit sa connaissance des figures et configurations-clés (triangles, quadrilatères, cercles), et de leurs propriétés géométriques et métriques. »

Source : Document ressources « Géométrie plane »

Les propriétés introduites dans ce chapitre (relations entre angles et parallélisme, somme des angles d'un triangle, triangles semblables) fournissent un éventail d'outils pour aller plus loin dans les compétences raisonner, communiquer.
Dans une première partie, la notion d'angles alternes-internes offre un vocabulaire commode pour donner une caractérisation angulaire du parallélisme.
Dans une deuxième partie, les triangles semblables fournissent un vocabulaire réutilisable dans les différents énoncés du théorème de Thalès.
Les exercices de ce chapitre permettent d'entretenir et de consolider sa compétence dans la manipulation des instruments de tracé et de mesure et de se familiariser progressivement avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique permettant des constructions. Pour certaines figures relevant d'une procédure algorithmique, comme l'activité TICE 3 page 231, le logiciel Scratch est utilisé. Le lutin va se déplacer en « déplacement relatif » (avec les commandes : avancer, tourner) et en parallèle en « déplacement absolu » (avec les commandes : aller à, s'orienter).
La modélisation en géométrie plane est une façon de représenter le monde (domaine 5). L'exemple de la tâche complexe page 232 fait référence à une méthode historique ayant permis d'estimer la circonférence de la Terre par Eratosthène. Elle illustre les connexions de la géométrie plane avec des activités humaines (domaine 5). C'est l'occasion aussi d'enrichir la connaissance historique des élèves : l'interdisciplinarité donne du sens aux notions mathématiques.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités ■ Activité 2 : Figure dynamique ■ Activité 4 : Figure dynamique
Objectif 1 **Objectif 2**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Utiliser les angles alternes-internes (1) ■ Exercice 8 : Figure dynamique ■ Exercice 11 : Figure dynamique ■ Exercice 13 : Figure dynamique ■ Vidéo « *Je comprends* » : Utiliser des triangles semblables ■ Exercice 22 : Figure dynamique
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours ■ Exercice 34 : Figure dynamique ■ Exercice 40 : Figure dynamique
Je résous des problèmes	■ Exercice 49 : Figure dynamique ■ Exercice 60 : Figure dynamique ■ Exercice 61 : Figure dynamique
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Figure dynamique ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU dans les combles de la maison

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Reconnaitre des angles alternes-internes

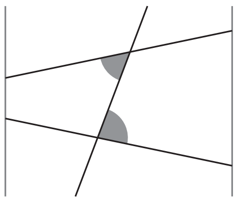
• Considérations didactiques et mise en pratique

La situation proposée va permettre aux élèves de s'approprier, puis d'appliquer la définition d'angles alternes-internes.
Cette activité s'inscrit dans les deux classes suivantes : reconnaissance d'une configuration de base dans un environnement (question **1**) et programmes de construction (question **2**).
– La question **1** permet à l'élève de mettre en œuvre, dans un contexte de situation d'apprentissage, la définition citée au début de l'activité, tout en travaillant son sens de l'observation.
– La question **2** vise à stabiliser et à consolider cette nouvelle notion à l'aide d'une construction.

Ce travail peut s'effectuer par groupe ou individuellement sur papier. Il sera intéressant pour la restitution de s'arrêter sur chaque cas de figure pour expliquer pourquoi les angles sont ou ne sont pas alternes-internes.
Dans la deuxième question, plusieurs exemples de positionnement des droites pourront être tracés, y compris dans le cas particulier des droites parallèles, afin de susciter la réaction des élèves.

• ***Correction***

1. a. non ; **b.** non ; **c.** oui ; **d.** non ; **e.** oui ; **f.** non.
2. À vérifier sur le cahier de l'élève.



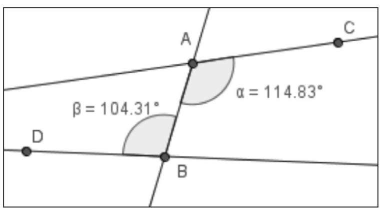
Activité 2. Représenter deux angles formés par deux parallèles et une sécante

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

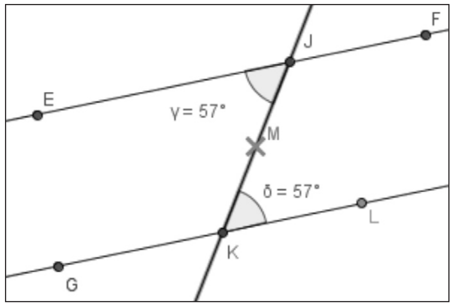
Cette activité mathématique de recherche consiste à transformer des représentations afin d'émettre des conjectures sur la mesure des angles alternes-internes lorsque les deux droites sont parallèles.
L'objectif des questions **1** et **2** est de communiquer une conjecture à partir d'une situation géométrique à construire à l'aide d'un logiciel
L'objectif de la question **3** est de faire découvrir aux élèves les propriétés liées aux parallélismes et aux angles alternes-internes.
La question **4** mélange construction, raisonnement et communication. On passe du registre de la représentation à celui de la formalisation et de la symbolisation.
Du point de vue de la mise en œuvre, les élèves vont sur les ordinateurs pour construire en binôme la figure avec les affichages demandés.
Pour réaliser cette activité, les élèves doivent avoir une légère connaissance technique de GeoGebra, ils doivent notamment savoir afficher des angles dans le logiciel de géométrie dynamique. Si ce n'est pas le cas, le professeur pourra vidéoprojeter un exemple en amont, à l'ensemble de la classe.
Il faudra accorder de l'importance à la démonstration de la dernière question, les élèves ayant peu l'habitude de ce type de tâche.

• ***Correction***

1. Construction



2. Les deux angles sont alternes-internes.
3. a. Il faut déplacer les points de façon à ce que (AC) //(BD).
b. Conjecture : Les angles alternes-internes formés par deux droites parallèles sont égaux.
4. a. Oui



b. Les angles alternes-internes sont symétriques par rapport au point M. Or la symétrie centrale conserve les mesures d'angle.

Activité 3. Conjecturer la définition de deux triangles semblables en manipulant

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Cette activité, à prise d'initiative, sert à introduire une notion nouvelle : celle des triangles semblables. C'est une notion mathématique assez complexe, dont la présence dans les programmes scolaire a évolué ces dernières années. Longtemps enseigné en 2de, elle apparait maintenant dans les nouveaux programmes de collège, applicables à la rentrée 2016.
Dans la question **1**, la manipulation va permettre la construction du sens de cette nouvelle notion.
Dans la question **2**, les élèves vont travailler la compétence communiquer. En effet, à partir d'observations faites sur les triangles, ils pourront établir en langage courant que des triangles semblables sont des triangles de même forme : cela signifie qu'ils ont les mêmes angles, mais qu'ils ont des dimensions différentes.
Le temps de recherche laissé éventuellement aux élèves est variable, tout dépend si le travail est individuel ou en groupe.
Les élèves doivent faire preuve d'initiative et d'autonomie pour arriver à établir une définition de deux triangles semblables.

• ***Correction***

2. Triangles semblables à ABC : IHJ et PQR.
Triangles non semblables à ABC : DEF, TUV et XYZ.
3. Deux triangles sont dits semblables s'ils ont leurs angles de même mesure.

Activité 4. Construire et effectuer des mesures sur des triangles à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

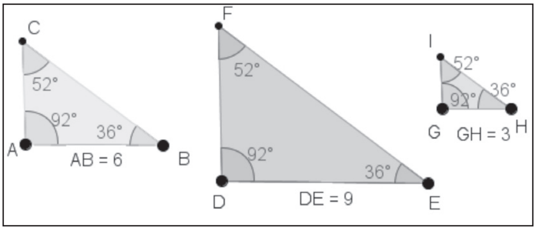
• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Dans cette activité, les élèves vont s'appuyer sur des outils de mesure d'un logiciel de géométrie pour conjecturer des

propriétés de deux triangles semblables. Deux classes de problème apparaissent ici : les programmes de construction et le calcul de grandeurs.
Dans la question **1**, les élèves doivent utiliser des stratégies appropriées pour tracer les trois triangles (dont une longueur et deux angles sont connus) en utilisant le logiciel GeoGebra.
Ils doivent tenir compte de la propriété : la somme des angles dans un triangle vaut 180°. Ils utilisent aussi par la suite la partie tableur du logiciel pour calculer les rapports de longueur.
Dans la question **2**, le concept des rapports proportionnels doit être utilisé par les élèves, afin d'en déduire une caractérisation des triangles semblables.
Dans la question **3**, l'outil mesure d'angle permettra de comparer deux angles homologues.
Dans la question **4**, les élèves doivent conjecturer le fait qu'il existe une relation entre les angles et les côtés homologues dans les triangles semblables. Celle-ci se fera en équipe de deux dans une salle informatique. Les élèves devront être capables d'utiliser le logiciel GeoGebra, mais le professeur sera présent pour aider les élèves à passer de la fenêtre tableur à la fenêtre graphique.

• Correction

1. Construction de trois triangles connaissant une longueur et deux angles.
Utilisation de la propriété : la somme des angles dans un triangle est égale à 180°.



2. a. Tableur :

	A	B	C	D	E	F
1	DE/AB=	1.5	GH/AB=	0.5	DE/GH=	3
2	EF/BC=	1.5	HI/BC=	0.5	EF/HI=	3
3	DF/AC=	1.5	GI/AC=	0.5	DF/GI=	3

b. Les rapports des longueurs des côtés homologues de deux triangles sont égaux.
On peut observer les tailles des triangles suivant la valeur du coefficient.
3. Les trois triangles ont leurs angles égaux.
4. ABC, DEF et GHI sont des triangles semblables (de même forme).

■ Objectif 1. Caractériser le parallélisme avec les angles

Je m'entraine

1 a. 63° ; **b.** Oui. Les droites sont parallèles.

2 a. non ; **b.** oui ; **c.** non ; **d.** non.

3 À vérifier sur le cahier de l'élève.

4 a. Les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{BED}$ sont alternes-internes, formés par les droites (AD) et (BC).
b. $\widehat{EDC}$ et $\widehat{ECB}$ ne sont pas alternes-internes.

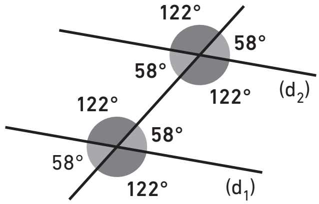
5 Les angles colorés sont égaux car « si deux angles alternes-internes sont formés par deux droites parallèles coupées par une sécante, alors ces deux angles sont égaux ».

6 a. 34°. Les angles alternes-internes sont égaux car $(d_1)//(d_2)$.
b. On ne peut pas savoir.

Je résous des problèmes simples

7 $180 - 136 = 44°$.

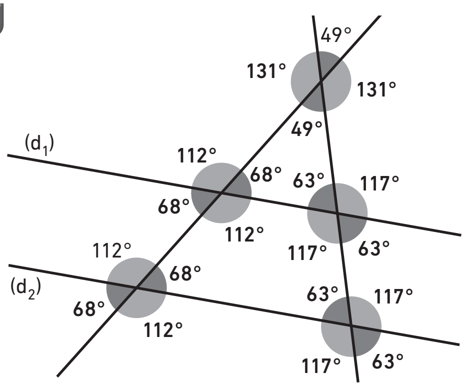
8



9 Oui car $180 - 147 = 33°$. Les angles alternes-internes sont égaux donc les droites sont parallèles.

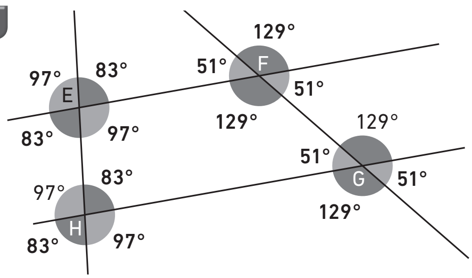
10 $180 - 37 = 143°$. Les angles alternes-internes sont égaux donc les tiges sont parallèles.

11



12 $180 - (44 + 90) = 46°$. Les droites (d_1) et (d_2) sont donc parallèles.

13



■ Objectif 2. Cas d'égalité des triangles – Triangles semblables

Je m'entraine

14 **a.** Vrai ; **b.** Vrai ; **c.** Faux ; **d.** Vrai.

15 **1.** AID et ABC ont deux angles égaux donc ils sont semblables.

2. $\frac{AI}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ID}{BC}$

3. AD = 21 mm et ID = 19,5 mm.

16 **1.** ABC et AIJ ont deux angles égaux donc ils sont semblables.

2. $\frac{AB}{AI} = \frac{AC}{AJ} = \frac{BC}{IJ}$

3. AJ = 24 mm et BC = 120 mm.

17

Sommets homologues	Côtés homologues	Angles homologues
A et E	[BC] et [RD]	$\widehat{A}$ et $\widehat{E}$
B et D	[AC] et [RE]	$\widehat{B}$ et $\widehat{D}$
C et R	[AB] et [ED]	$\widehat{C}$ et $\widehat{R}$

18 **1.** AEI et ABC sont des triangles semblables. De même pour CJF et CAB.

2. $\frac{AE}{AB} = \frac{AI}{AC} = \frac{EI}{BC}$ et $\frac{CI}{CA} = \frac{CF}{CB} = \frac{JF}{AB}$.

Je résous des problèmes simples

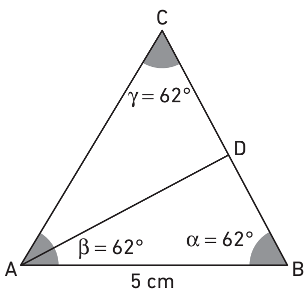
19 **1.** ABC et BMP ont deux angles égaux donc ils sont semblables.

2. $\frac{BM}{BA} = \frac{BP}{BC} = \frac{PM}{CA}$

3. BM ≈ 4,7 cm donc AM ≈ 1,3 cm ; BC ≈ 6,4 cm donc PC ≈ 1,4 cm.

20 Non, les côtés ne sont pas proportionnels.

21 **1.**



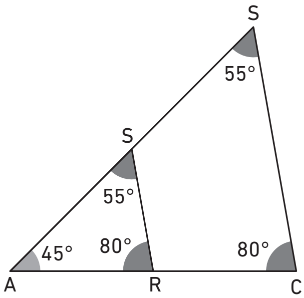
2. ADC et ADB ont deux angles égaux donc ils sont semblables.

3. a. $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AD} = \frac{DC}{DB}$

b. $k = 1$.

22 **1.** $\widehat{C} = 55°$

2.



3. $\widehat{ARS} = 80°$ et $\widehat{ASR} = 55°$.

4. $\frac{AR}{AB} = \frac{AS}{AC} = \frac{RS}{BC} = \frac{1}{2}$

23 **1.** ADE et ABC ont deux angles égaux donc ils sont semblables.

2. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

3. AC = 3,66 m.

24 **1.** ODC et OBA sont des triangles semblables.

2. $\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}$.

3. $OD = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ et $\frac{20}{3} \approx 6{,}67$.

■ Je travaille seul (e)

25 C **26** A **27** A **28** B **29** B

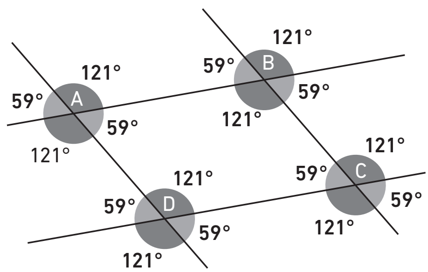
30 Les angles jaune et violet ; orange et gris sont alternes-internes.

31 Angles alternes-internes : $\widehat{AEF}$ et $\widehat{EFC}$.

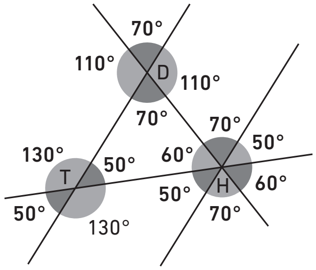
Angles qui ne le sont pas : $\widehat{AEF}$ et $\widehat{EFD}$.

32 180 – 136 = 44°.
On utilise deux propriétés :
« Les angles alternes-internes formés par deux droites parallèles sont égaux » et « Un angle plat mesure 180° ».

33



34



35 (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles car les angles alternes-internes ne sont pas égaux.

36 **1.** ABC et MNP sont semblables car ils ont leurs angles égaux.

2.

Sommets homologues	Côtés homologues
A et M	[BC] et [PN]
B et N	[AC] et [MN]
C et P	[AB] et [MN]

3. $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{PM} = \frac{BC}{PN}$.

37 $\frac{AB}{EB} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{ED} = 1{,}5$, donc les triangles ABC et DEB sont semblables.

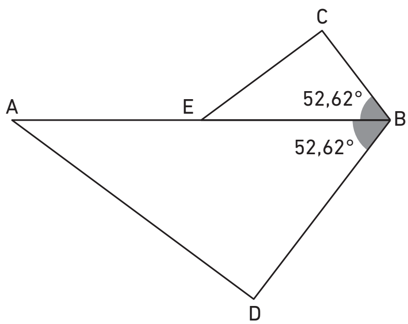
38 **1.** $180 - (72 + 63) = 45°$. Les triangles ont leurs angles égaux donc ils sont semblables.

2. NP = 4,8 cm.

39 **1.** Les triangles VOL et UML sont semblables.

2. $\frac{LV}{LU} = \frac{LO}{LM} = \frac{OV}{UM}$ donc VO = 3,2 m.

40 **1.**



2. Les longueurs des côtés homologues des deux triangles sont proportionnelles.

3. Faux : L'aire de ADB est quatre fois plus grande que l'aire de BCE.

4. [BA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CBD}$.

41 Vrai. RG = 100 m et RM = 40 m.

Je résous des problèmes

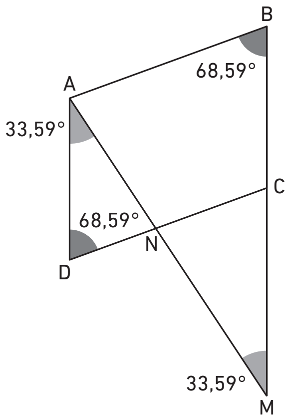
42 $\widehat{FAB} = \widehat{ABD} = 40°$. Donc les droites (FG) et (CD) sont parallèles.

43 $\widehat{BAC} = 40°$; $\widehat{ABC} = 60°$ et $\widehat{ACB} = 80°$.

44 Les angles alternes-internes sont égaux donc la table à repasser est stable.

45 Le triangle DEC est isocèle donc ses angles à la base sont égaux à 70°.
Les angles alternes-internes sont égaux donc la table est parallèle au sol.

46 **1.** ADN et ABM ont leurs angles égaux donc ils sont semblables.



2. $\frac{DN}{AB} = \frac{AD}{BM}$ donc $DN \times BM = AB \times AD$.

3. $BM \approx 2{,}63$.

47 $\widehat{ABC} = 180 - 37 = 143°$.

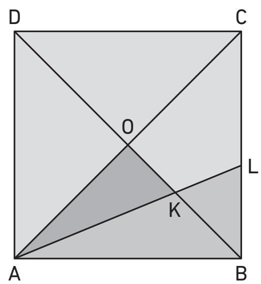
48 **1. a.** CBD et CAE sont semblables car ils ont trois angles égaux.

b. $\frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CA} = \frac{BD}{AE} = \frac{1}{2}$.

2. Le prix final est de 36,14 € environ.

3. Calculons CD avec le théorème de Pythagore : CD = 5 cm.
$P = 25 + 0{,}78\,(5 + 3 + 2\pi) \approx 36{,}14$ €.

49 **1.**



2. On a les égalités : $\frac{AK}{AL}=\frac{OK}{BL}=\frac{OA}{AB}$ donc les triangles AOK et ABL sont semblables.

3. Coefficient de réduction : $k=\frac{OK}{BL}=\frac{\frac{10\sqrt{2}}{4}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

50 **1.** Oui, FUI et DIL sont semblables car les triangles ont deux angles égaux.
2. $\widehat{UFI}=\widehat{ILD}=180-(60+30)=90°$.
Or deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.
Donc (FU)//(DL).

51 Les enclos des élans et des ours bruns sont de même forme. Il faut étudier pour cela les rapports de longueurs des côtés homologues : $\frac{187{,}5}{125}=1{,}5$; $\frac{138}{92}=1{,}5$; en revanche $\frac{92}{41}\approx 2{,}24$.

52 Les données vérifient les conditions du théorème de Thalès dans les triangles ANM et ABC.
On a alors les égalités $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$.
Les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles, donc les triangles sont semblables.

53 **1.** ABC et ADE sont des triangles semblables car leurs angles sont égaux.
2. $\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{AE}=\frac{AB}{ED}$.
3. $AE=\frac{6\times 0{,}5}{1}=3\,m$.

54 La réponse de Claire n'est pas correcte.
Il faut écrire les égalités des rapports de longueur des côtés homologues des deux triangles semblables.
$\frac{0{,}8\times 13}{0{,}44}\approx 23{,}64<30\,m$.

Dans les autres matières

55 **1. a.** Les miroirs sont parallèles donc les angles alternes-internes sont égaux.
b. $\widehat{BIJ}=\widehat{AIS}=\widehat{DJT}=\widehat{IJC}$.
2. a. $\widehat{RIJ}=\widehat{IJT}$ (il faut décomposer les angles plats).
b. Les angles alternes-internes $\widehat{RIJ}$ et $\widehat{IJT}$ sont égaux donc les rayons sont parallèles.

56 **1.** $\widehat{ABF}=70°$ car (d_1) // (d_2) donc les angles alternes-internes sont égaux.
2. $\widehat{EBD}=70°$ car les angles opposés par le sommet ont même mesure.

Jeux mathématiques

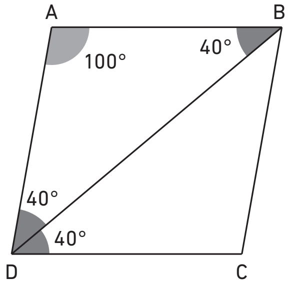
57 **1.** $\widehat{RPI}=67°$; $\widehat{ESM}=90°$; $\widehat{PRI}=46°$; $\widehat{RMS}=46°$; $\widehat{ERI}=44°$; $\widehat{IER}=68°$.
2. Le mot mystère est PRISME.

58 Il y a six triangles semblables à ABC.

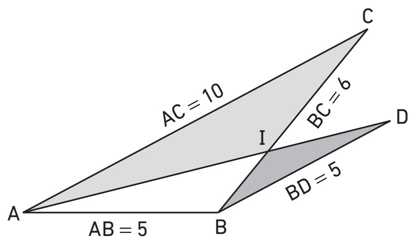
59 **1.** Distance Miami – Les Bermudes : 1 665,38 km ;
distance Les Bermudes – Porto Rico : 1 579,71 km ;
distance Porto Rico – Les Bermudes : 1 633 km.
Coefficient de réduction :
prendre par exemple $k=\frac{1}{20\,000}=0{,}00005$ et tracer un triangle MBP avec $MB\approx 8{,}3$ cm , $BP\approx 7{,}9$ cm et $PB\approx 8{,}2$ cm.
2. Réponse B.

Devoirs à la maison

60 **1.** $\widehat{BDC}=40°$ car (AB)//(DC) donc les angles alternes-internes sont égaux.
2. a. $\widehat{ADB}=180-(100+40)=40°$.
b. [DB] est la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$.
3. $\widehat{ADx}=180-80=100°$.
4. Construction du trapèze en commençant par [AB] :



61 **1.**



2. a. $\widehat{IAC}=\widehat{IDB}$.
Les deux droites (AC) et (BD) sont parallèles alors les angles alternes-internes formés par ces droites et la sécante (AD) sont égaux.
b. $\widehat{IAC}=\widehat{IDB}=\widehat{IAB}$ donc ABD est isocèle.
3. a. $\widehat{ICA}=\widehat{IBD}$.
Les deux droites (AC) et (BD) sont parallèles alors les angles alternes-internes formés par ces droites et la sécante (BC) sont égaux.
b. IAC et IDB sont semblables car les deux triangles ont leurs angles égaux.
4. a. $\frac{IB}{IC}=\frac{ID}{IA}=\frac{BD}{AC}$.
b. $k=\frac{1}{2}$.
c. $ID=3{,}25$.
5. $A_2=\frac{1}{4}A_1$.

■ Avec un logiciel

Activité 1. Un bouclier géométrique

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité est un programme de construction effectué au moyen d'un logiciel de géométrie dynamique.

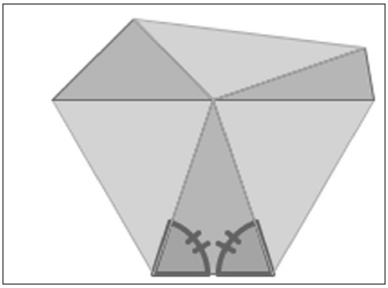
Ce problème s'inscrit dans les deux classes suivantes : la reconnaissance d'une configuration (triangles semblables) dans un environnement complexe et les programmes de construction (questions **1** à **8**).

D'un point de vue interdisciplinaire, le thème « Culture et création artistiques » peut être abordé : on peut observer le design de ce bouclier, sans symétries particulières. En revanche, les élèves pourront répondre à la question **9** que parmi les six triangles construits, deux sont homothétiques. La thématique « Sciences technologie et société » est aussi présente, c'est l'occasion de parler de l'évolution des boucliers (forme et matériaux) de l'époque sumérienne au XX^{e} siècle.

Cette activité est à réaliser par groupe de deux sur ordinateur. Il est préférable pour cette activité de connaitre les outils de base (cercle, milieu, perpendiculaire, …) dans GeoGebra et de savoir les manipuler. Une synthèse orale de la question **9** concluera la séance.

• Correction

1 à **8** : Suivre les étapes de constructions pas à pas pour obtenir le bouclier.



9. Les triangles EAB et AFC sont semblables (et même isométriques car $k = 1$).

Activité 2. Des triangles semblables

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité peut répondre à la problématique suivante : comment s'inscrit la notion de triangles semblables dans le paysage mathématique, et à quoi peut-elle servir ?

Elle peut constituer un outil pour faire le lien entre le cadre géométrique et numérique caractérisant certaines figures géométriques, ici les triangles.

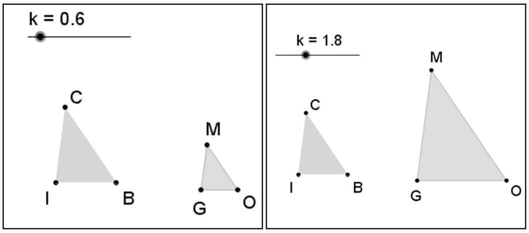
Les questions **1** à **3** concernent la partie construction des deux triangles semblables, avec la création d'un curseur *k* qui représente le coefficient d'agrandissement ou de réduction. Le curseur *k* permet d'établir les rapports entre les différentes grandeurs caractéristiques des triangles. La question **4** est une phase d'observation de la figure.

L'outil numérique est intégré ici à la résolution de problèmes dans la construction mais aussi dans la démarche d'investigation, l'observation, l'analyse et la déduction.

Ce TP s'effectue sur ordinateur, par groupe de deux si possible. Le changement de cadre (géométrique / numérique) interne à la notion peut aussi être un obstacle pour les élèves. Il est donc important de valider chaque question avant que chaque groupe passe à la question suivante.

• Correction

1. à **3.** Suivre les étapes de construction pas à pas pour construire les triangles BIC et OGM.



4. a. • Si $k < 1$ (coefficient de réduction), alors OGM est plus petit que BIC.
• Si $k > 1$ (coefficient d'agrandissement), alors OGM est plus grand que BIC.
• Si $k = 1$, alors BIC et OGM ont la même taille.
b. Il faut déplacer GOM de façon à ce que les deux triangles se superposent.
c. BIC et OGM sont semblables car ils ont trois angles égaux.

Activité 3. Dessine-moi un triangle

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité contribue à la validation d'un attendu de fin de cycle : « Écrire, mettre au point et exécuter un programme simple ». Il met l'accent sur l'analyse d'un problème en vue de concevoir un algorithme, mais aussi de le programmer. La première partie consiste à faire de l'algorithmique *débranché*. Les élèves doivent comprendre les instructions à donner au lutin pour construire un triangle connaissant deux longueurs et un angle. Puis ils doivent réfléchir aux enchainements d'instructions permettant de construire un triangle semblable au premier. Cette partie participe à la construction de la pensée algorithmique et développe des compétences dans la représentation de l'information et son traitement.

Dans une deuxième partie, la programmation avec Scratch permet de visualiser les deux triangles, puis de faire le lien entre le coefficient *k* et le coefficient d'agrandissement ou de réduction.

Ce problème s'inscrit dans les deux classes suivantes : programmes de construction et compréhension et modification d'une construction donnée par un dessin ou un algorithme. Pour la mise en œuvre, la partie A se fait de manière plutôt individuelle, sur papier (une correction permet ensuite de mettre tous les élèves au même niveau). On peut imaginer qu'elle se déroule de manière collective sous forme de débats.

La partie B se fait sur ordinateur avec le logiciel Scratch : la programmation événementielle, la notion de bloc, les outils de déplacements (avancer, tourner, aller à), la variable réponse sont au cœur de l'activité. Pour autant, les blocs de test et de boucle « répéter » ne sont pas utilisés. Il convient de réserver l'essentiel du temps à une activité autonome des élèves. Même si le script est déjà donné aux élèves, on peut laisser une part d'imagination, de créativité aux élèves qui souhaiteraient écrire leur propre script pour construire deux triangles semblables.

• Correction

1. Instructions pour construire ABC :
– définir une position initiale à l'aide des coordonnées du lutin
– mettre le stylo en position d'écriture
– avancer de 50 pas
– tourner de 140° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre
– avancer de 70 pas
– revenir à la position initiale
– relever le stylo

2. Instructions pour construire DEF :
– définir une position initiale à l'aide des coordonnées du lutin
– mettre le stylo en position d'écriture
– saisir un coefficient $k > 0$
– avancer de 50 * k pas
– tourner de 140° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre
– avancer de 70 * k pas
– revenir à la position initiale
– relever le stylo

3. ABC et DEF sont semblables.

4. Créer avec Scratch les blocs « triangle 1 » et « triangle 2 ».

5. Le Bloc 1 va avec le script 3 ; le bloc 2 va avec le script 1 et le bloc 3 va avec le script 2.

6. Si $k < 1$, alors k est un coefficient de réduction,
si $k > 1$, alors k est un coefficient d'agrandissement.

■ Tâches complexes

1. La méthode d'Eratosthène

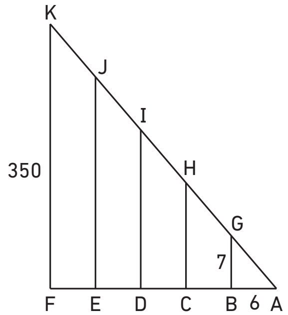
Étape 1 : Conversion stade en km.
5 000 stades = 787,5 km.

Étape 2 : Mesure de la circonférence de la Terre par Eratosthène.

7,2°	360°
787,5 km	39375 km

Étape 3 : Marge d'erreur : 40 075 − 39 375 = 700 km (ce qui est très peu en regard des moyens de l'époque !)

2. Les Dudu dans les combles de la maison



On cherche la longueur du chevron FK.
Les triangles ABG et AFK sont semblables.
Coefficient d'agrandissement entre les deux triangles : 5.

Donc on a les rapports : $\frac{AF}{AB} = \frac{FK}{BG} = 5$.

Donc FK = $5 \times 70 = 350$ cm, soit 3 m 50.
La longueur annoncée était bonne.

chapitre 11

Pyramides et cônes

I. Le programme

Thème C – Grandeurs et mesures

En continuité avec le travail engagé au cycle 3, ce thème se prête particulièrement à des connexions avec les autres thèmes du programme et offre de nombreux liens avec la physique-chimie ou les sciences de la vie et de la Terre. C'est aussi l'occasion d'activités de recherche (par exemple pour déterminer la formule donnant le volume de certains solides).

Les élèves doivent disposer de références concrètes (savoir, par exemple, que la circonférence de la Terre est environ 40 000 km) et être capables d'estimer l'ordre de grandeur d'une mesure. Par ailleurs, le travail autour des formules s'inscrit parfaitement dans l'introduction du calcul littéral.

Attendus de fin de cycle

- Représenter l'espace.
- Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Représenter l'espace	
■ Reconnaitre, nommer, comparer, vérifier, décrire des solides simples ou des assemblages de solides simples à partir de certaines de leurs propriétés. ■ Vocabulaire approprié pour nommer les solides : pavé droit, cube, prisme droit, pyramide régulière, cylindre, cône. ■ Reproduire, représenter, construire des solides simples ou des assemblages de solides simples sous forme de maquettes ou de dessins ou à partir d'un patron (donné, dans le cas d'un prisme ou d'une pyramide, ou à construire dans le cas d'un pavé droit).	■ Les éléments de vocabulaire associés aux objets et à leurs propriétés (solide, polyèdre, face, arête, polygone, côté, sommet, angle, demi-droite, segment, cercle, rayon, diamètre, milieu, médiatrice, hauteur, etc.) sont introduits et utilisés en contexte pour en préciser le sens : jeu du portrait, échange de messages, jeux d'associations (figures, désignations, propriétés, représentations). ■ Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités. ■ Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités. ■ Formule donnant le volume d'une pyramide, d'un cylindre ou d'un cône.

II. Contexte du chapitre

Les situations faisant appel à différents types de tâches (reconnaitre, nommer, comparer, vérifier, décrire, reproduire, représenter, construire) portant sur des objets géométriques, sont privilégiées afin de faire émerger des concepts géométriques (caractérisations et propriétés des objets, relations entre les objets) et de les enrichir.

Un jeu sur les contraintes de la situation, sur les supports et les instruments mis à disposition des élèves, permet une évolution des procédures de traitement des problèmes et un enrichissement des connaissances.

Les professeurs veillent à utiliser un langage précis et adapté pour décrire les actions et les gestes réalisés par les élèves (pliages, tracés à main levée ou avec utilisation de gabarits et d'instruments usuels ou lors de l'utilisation de logiciels). Ceux-ci sont progressivement encouragés à utiliser ce langage.

Les activités spatiales et géométriques sont à mettre en lien avec les deux autres thèmes : résoudre dans un autre cadre des problèmes relevant de la proportionnalité ; utiliser en situation les grandeurs (géométriques) et leur mesure. Par ailleurs, elles constituent des moments privilégiés pour

une première initiation à la programmation notamment à travers la programmation de déplacements ou de construction de figures.
En continuité avec le travail engagé au cycle 3, ce thème se prête particulièrement à des connexions avec les autres thèmes du programme et offre de nombreux liens avec la physique-chimie ou les sciences de la vie et de la Terre. C'est aussi l'occasion d'activités de recherche (par exemple pour déterminer la formule donnant le volume de certains solides).

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités ■ Activité 1 : Figure dynamique ■ Activité 3 : Figure dynamique
Objectif 1 **Objectif 2**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Construire le patron d'une pyramide ■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer le volume d'une pyramide
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Figure dynamique ■ Activité 2 : Figure dynamique ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Tout ça pour un verre !

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Découvrir la pyramide

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Cette nouvelle configuration de l'espace n'est pas un objet géométrique totalement nouveau. La découverte des propriétés de ce solide jusqu'alors jamais étudiées dans le cours de mathématiques sera alors facilitée par l'usage du logiciel. L'utilisateur pourra ainsi contourner le solide et l'observer sous différentes vues. Par exemple, en se plaçant en vue de dessus, les élèves pourront observer de façon dynamique la nature des bases des trois pyramides.

Si l'activité se déroule en salle informatique, il est important de consacrer un temps non négligeable aux manipulations et à l'observation. Dans la salle de classe avec un vidéoprojecteur, l'enseignant pourrait animer cette activité pour illustrer son cours et ainsi provoquer des débats autour des propriétés de ce solide.

• *Correction*

1. La pyramide a 5 sommets et 8 arêtes.
2. La pyramide a 4 faces latérales qui sont des triangles.
3. La base de la pyramide est un quadrilatère.

Activité 2. Reconnaitre et réaliser un patron d'une pyramide

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Cette activité a pour objectif de réinvestir les savoir-faire des élèves sur la vision dans l'espace de solides. L'usage et l'observation de patrons permettent de consolider le travail sur les images mentales de représentations en trois dimensions. La réalisation de patron est une activité difficile pour les élèves mais nécessaire dans leur apprentissage.

• *Correction*

1. Base de la pyramide : ABCD.
Faces latérales : ABE, BCF, CDG, ADH.
2. AE, AH, DH, DG, CF, BF, BE.
3. E, F, G, H.

Activité 3. Découvrir le cône de révolution

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Tout comme la pyramide, les élèves ne sont pas totalement étrangers à cette configuration nouvelle de l'espace : le cône de révolution. Dans la vie courante, ils connaissent par exemple les cônes glacés, les cônes de signalisation, … Le solide est défini et introduit comme le solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit. Cette approche doit être mise en parallèle avec ce qui été fait en classe de 5^{e} pour le cylindre de révolution.

Le logiciel de géométrie dynamique Cabri 3D en facilite grandement la perception. La démonstration à l'aide d'une équerre classique par exemple est possible mais cette manipulation ne permet pas vraiment de l'illustrer de façon bien perceptible. En utilisant un logiciel, il est possible de laisser une trace lors de la rotation ce qui est une plus-value considérable.

• Correction

5. ACD est un triangle rectangle en A.

7. a. AD **b.** D **c.** AC

Activité 4. Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution

• Considérations didactiques et mise en pratique

L'introduction de cette dernière compétence du chapitre s'appuie également sur les acquis antérieurs. L'activité met en avant la relation « un tiers » entre le volume d'un cône et le volume d'un cylindre de même base et même hauteur dont la formule est déjà connue depuis la classe de 5e. Il pourrait être intéressant de se procurer le matériel afin de réaliser l'expérience devant les élèves.

• Correction

1. $V_{cylindre} = \pi \times R^2 \times H \approx 384{,}65\,\text{cm}^3$
et $V_{cône} = V_{cylindre} : 3 \approx 384{,}65 : 3 \approx 128{,}22\,\text{cm}^3$.

■ Objectif 1 : Observer et manipuler les pyramides et les cônes de révolution

Je m'entraine

1 **a.** E.
b. ABCD.
c. EAB, EBC, ECD et EAD.
d. AE, BE, CE, DE.
e. À vérifier sur le cahier de l'élève.

2 Hauteur : 8 cm.
Génératrice : 10 cm.
Rayon de la base : 3 cm.

Je résous des problèmes simples

3 À vérifier sur le cahier de l'élève.

4 À vérifier sur le cahier de l'élève.

5 À vérifier sur le cahier de l'élève.

6 À vérifier sur le cahier de l'élève.

7 À vérifier sur le cahier de l'élève.

8 **1.** BCG et BCD sont des triangles rectangles en C.
2. À vérifier sur le cahier de l'élève.

9 On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABD, on trouve AD ≈ 6,32 m.

10 On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABD par exemple : AO ≈ 6,24 cm.

11 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. Hauteur ≈ 6,1 cm.

■ Objectif 2 : Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution

Je m'entraine

12 **a.** 3,5 cm^3 = 3 500 mm^3.
b. 50 cm^3 = 0,05 dm^3.
c. 4,2 dm^3 = 4 200 cm^3.
d. 8,3 dam^3 = 8 300 m^3.
e. 1,3 L = 1 300 cm^3.
f. 60 L = 60 000 cm^3.
g. 400 cm^3 = 0,4 L.
h. 6 500 cm^3 = 6,5 L.

13 Dans l'ordre : Cylindre, cône, prisme, pyramide.
Celui de plus grand volume semble être le cylindre.

14 **a.** 9 cm^3.
b. $\frac{55}{3}$ cm^3.
c. 20 cm^3.
d. 20 cm^3.

15 **a.** 25 cm^2 **b.** 50 cm^3

Je résous des problèmes simples

16 Le premier toit a pour volume 16 cm^3, le deuxième : 8,75 cm^3.

17 Volume d'une coupelle remplie à 1 cm du bord : 307,88 cm^3. Il faudra donc 7 coupelles.

18 65 cm^3

19 10 cm^3

20 Viviane confond le diamètre et le rayon.
Dans le calcul du volume, elle a oublié de diviser par 3.

21 Le volume d'un cylindre est le triple de celui d'un cône de même base et de même hauteur.

22 37,9 cm^3

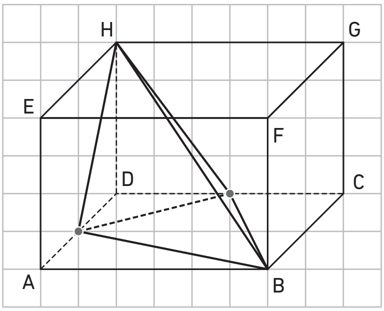
■ Je travaille seul(e)

23 C **24** B **25** B **26** B **27** A

28 **1.** 1 et 2.
2. Pour 1 : 4 faces et 6 arêtes ; pour 2 : 5 faces et 8 arêtes.

29 La figure 2

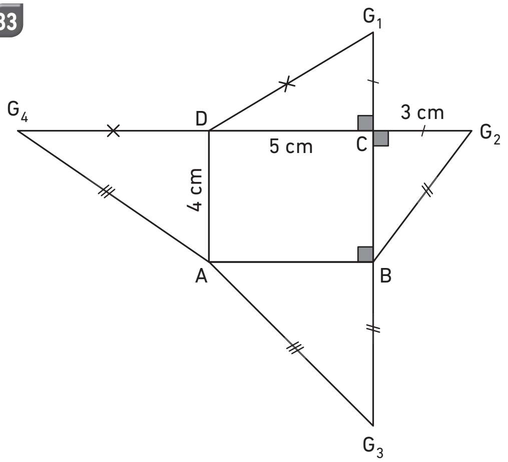
30



31 **1.** FACH est un tétraèdre régulier.
2. Il s'agit de construire un triangle équilatéral de côté de longueur $\sqrt{50}$ cm. On pourra reporter au compas la longueur $\sqrt{50}$ cm en construisant en vraie grandeur le triangle AEH. Son hypoténuse AH mesure $\sqrt{50}$ cm.

32 On commence par construire un carré ABCD de côté 6 cm. Sur les côtés du carré et à l'extérieur, on construit quatre triangles isocèles dont les côtés égaux mesurent 5 cm.

33



34 On applique le théorème de Pythagore :
Hauteur $\approx$ 7,8 cm.

35 On applique le cosinus dans le triangle MNP :
MN $\approx$ 5,7 cm.

36 $V = \dfrac{5{,}5 \times \pi \times 2{,}5^2}{3} \approx 36\,\text{cm}^3$

37 **1.** On applique la propriété de Pythagore dans le triangle MNP : MP = 2,7 cm.
2. $A = 3{,}6 \times 2{,}7 : 2 = 4{,}86\ \text{cm}^2$; $V = 4{,}86 \times 5{,}5 : 3 = 8{,}91\ \text{cm}^3$.

38 $A = 5 \times 4 = 20\ \text{cm}^2$; $V = 20 \times 3 : 3 = 20\ \text{cm}^3$.

39 **1.** On applique deux fois le théorème de Pythagore :
Hauteur $\approx$ 2,6 cm.
2. $V \approx \dfrac{2{,}6 \times 6^2}{3} \approx 31{,}2\,\text{cm}^3$

40 **1.** On applique la propriété de Pythagore dans le triangle ABD par exemple : AD $\approx$ 6,93 cm.
2. $A = \pi \times 4^2 \approx 50{,}27\ \text{cm}^2$; $V \approx 50{,}27 \times 6{,}93 : 3 \approx 116\ \text{cm}^3$.

41 **1.** On applique le cosinus dans le triangle SAI par exemple : SI $\approx$ 5,79 cm et IB $\approx$ 6,89 cm.
2. $A = \pi \times 6{,}89^2 \approx 149{,}33\ \text{cm}^2$; $V \approx 149{,}33 \times 5{,}79 : 3 \approx 288\ \text{cm}^3$.

42 **1.** Vrai **2.** Faux

43 **1.** $V = \dfrac{b \times a^2}{6}$
2. $V = \dfrac{5 \times 10^2}{6} \approx 83{,}3\,\text{cm}^3$.

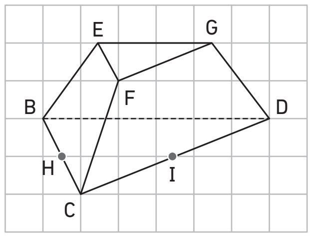
44 Il faut multiplier par 3 le volume du cône.
En effet, le volume du cône est égal au tiers du volume du cylindre de même hauteur.

■ Je résous des problèmes

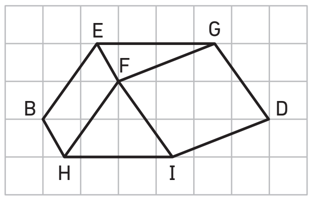
45 4 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6 et 5.

46 Cylindre : 141,37 m^3.
Cône : 9,42 m^3.
Volume de la fusée : 150,79 m^3.

47 **1.**



2.



48 1C – 2 F – 3D – 4E – 5B – 6A

49 Ce travail peut être mené en classe en groupe semi-autonome.

50 **1.** On applique la propriété de Pythagore pour calculer la longueur de la diagonale de la base. On trouve environ 12,73 m.
Donc OA $\approx$ 6,36 m.
On applique la propriété de Pythagore dans le triangle AOS : SA $\approx$ 7,52 m.
2. On applique la propriété de Pythagore pour calculer la hauteur d'une face latérale de la pyramide. On trouve environ 6 m.
La surface du toit est environ égale à $4 \times 9 \times 6 : 2 = 108\ \text{m}^2$.

51 **1.** IJK est un triangle équilatéral.
2. Le morceau est une pyramide à base triangulaire.
3. $2,5 \times 2,5 \times 2,5 : 3 = 5,2$ cm^3.
4. À vérifier sur le cahier de l'élève.

52 $A = \pi \times 7^2 \approx 153,938$ cm^2 ;
$V \approx 153,938 \times 10 : 3 - 153,938 \times 4 : 3 \approx 307,9$ cm^3.

53 $V = 30^2 \times h : 3 = 300 \times h$ m^3 ;
$V = 780\,000\,000$ L $= 780\,000$ m^3.
Donc $h = 780\,000 : 300 = 2600$ m.
La hauteur d'une pyramide de base un carré de côté 30 m contenant la totalité du pétrole déversé serait égale à 2,6 km !

54 À vérifier sur le cahier de l'élève.

55 À vérifier sur le cahier de l'élève.

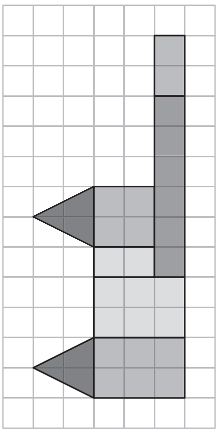
Dans les autres matières

56

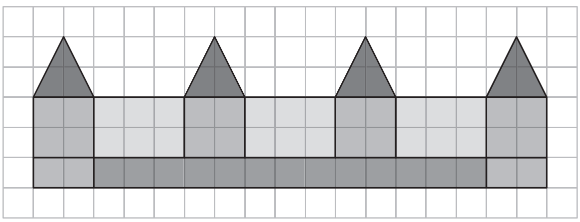
Pyramide	Aire	Volume
Khéops	$230^2 = 52\,900$ m^2	$52\,900 \times 137 : 3 \approx 2\,415\,767$ m^3
Khephren	$215^2 = 46\,225$ m^2	$46\,225 \times 137 : 3 \approx 2\,110\,942$ m^3
Mykérinos	$105^2 = 11\,025$ m^2	$11\,025 \times 66 : 3 = 242\,550$ m^3

Classement des pyramides dans l'ordre croissant de leur volume : Mykérinos, Khephren et Khéops.

57 **Vue de droite :**



Vue de derrière :



Jeux mathématiques

58 Ce travail peut être mené en classe en groupe semi-autonome.

59 À vérifier sur le cahier de l'élève.

60 L'angle marqué forme un triangle équilatéral donc l'angle marqué mesure 60°.

Devoirs à la maison

61 À vérifier sur le cahier de l'élève.

62 À vérifier sur le cahier de l'élève.

63 Pyramide de hauteur 12 cm : 1 017,9 cm^3.
Pyramide de hauteur 8 cm : 301,6 cm^3.
Pyramide retournée de hauteur 4 cm : 150,8 cm^3.
Volume d'eau que l'on peut verser :
$1017,9 - 301,6 - 150,8 = 565,5$ cm^3.

Avec un logiciel

Activité 1. L'ombre de la table

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
GeoGebra est utilisé ici comme outil de simulation. Il permet d'observer et de visualiser l'ombre d'une table éclairée par un spot. L'objectif est ainsi de conjecturer les variations de l'ombre selon différentes situations : déplacement du spot ou de la table, modification des dimensions de la table. La fin de l'activité montrera que la surface de l'ombre de la table est proportionnelle à la surface de la table. L'enseignant pourra demander en prolongement ou en devoir à la maison de démontrer ce résultat. L'utilisation qui est faite de GeoGebra dans cette activité permet une vision d'objet de l'espace comme on pourrait le faire sur le papier. Il est donc important de respecter les règles de représentation en perspective cavalière.

• ***Correction***
Vérifier la construction dynamique sur le fichier de l'élève.

Activité 2. Le bouchon

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
L'objectif de cette activité est de modéliser un problème de volumes à l'aide du tableur.
Le logiciel facilitera la recherche de la solution en effectuant des essais pour différentes valeurs de la hauteur du cône 1. L'activité ne présente aucune difficulté technique pour les élèves.

• ***Correction***
Le volume du bouchon est constant !

Activité 3. Volumes

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
L'objectif de l'activité est de programmer un petit algorithme permettant d'effectuer des calculs de volumes de cône ou de pyramide.

• *Correction*

Pour la pyramide, on pourra remplacer le calcul de l'aire d'un disque par le calcul de l'aire d'un carré par exemple.

■ Tâches complexes

1. La pyramide du Louvre

On pourra, par exemple, réaliser une maquette à l'échelle $\frac{1}{500}$.

Dans ce cas, la base est un carré de 7,1 cm. Les faces latérales sont des triangles isocèles de côtés de longueurs 7,1 cm, 6,6 cm et 6,6 cm.

2. Tout ça pour un verre !

Pour un cylindre, le volume est égal à :

$$V = \pi \times R^2 \times H.$$

Si on multiplie le rayon de la base par 2 et on divise la hauteur par 2, on obtient :

$$V' = \pi \times (2R)^2 \times \frac{H}{2} = 2 \times \pi \times R^2 \times H.$$

Le verre le plus large est donc celui de plus grand volume.

Tâches complexes – Problèmes de synthèse

I. Tâches complexes

1. Le vélo

• Vitesse à vélo $= \dfrac{8{,}6}{\dfrac{32}{60}} = 16{,}125$ km/h

Donc le coefficient à utiliser dans la formule est 7.

Dépense énergétique $= \dfrac{7 \times 3{,}5 \times 75}{200} = 9{,}1875$ kcal/min.

$9{,}1874 \times (2 \times 32) = 588.$

Conclusion : Richard dépense 588 kcal pour l'aller-retour à vélo.

• Consommation Essence $= \dfrac{7{,}7 \times (2 \times 8{,}6)}{100} = 1{,}29$ L.

$1{,}355 \times 1{,}29 + 2 \approx 3{,}75.$

Conclusion : Richard économise environ 3,75 € par jour.

2. Les cactus

$\pi \times \left(\dfrac{35}{2}\right)^2 \times 15 \approx 14\,432$ cm^3.

Le volume du nouveau bac est environ 14,5 L.

$\dfrac{20}{100} \times 14{,}5 = 2{,}9.$

Conclusion : Le volume de billes d'argile à prévoir est d'environ 2,9 L.

Le volume d'un pot de fleur est d'environ 0,8 L (à calculer soit en raisonnant avec les triangles semblables et le volume de cônes, soit en approchant le volume d'un pot par celui d'un cylindre de hauteur 10 cm et de rayon 5 cm).

$14{,}5 - 2{,}9 - 5 \times 0{,}8 = 7{,}6.$ Il faut 7,6 L de mélange.

$\dfrac{1}{5} \times 7{,}6 = 1{,}52, \quad \dfrac{3}{5} \times 7{,}6 = 4{,}56.$

Conclusion : Il faut prévoir 1,52 L de terreau et de terre de jardin et 4,56 L de sable (si on réutilise le contenu des pots de fleurs).

3. Les sauts de puces

Le total des points obtenus est maximum (80 points) si on place les puces sur la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$.

Par exemple, en faisant les déplacements suivants :

– la puce ⊗ (orange) saute en (2 ;4) puis en (0 ;0) ;
– la puce ⊗ (vert) saute en (–2 ;–2) puis en (4 ;6) ;
– la puce ⊗ (bleu) a sauté en (–2 ;3) puis en (–2 ;–3) ;
– la puce ⊗ (jaune) a sauté en (2 ;–3) puis en (2 ;3).

4. Les mélanges de peinture

Il faut prendre les mesures sur le plan et utiliser l'échelle fournie. Les résultats dépendent donc des mesures effectuées et également des valeurs approchées choisies.

• ***Pour la chambre 1*** (largeur mur : 3 m et largeur porte : 0,71 m)

$3 \times 2{,}5 - 0{,}71 \times 2{,}04 = 6{,}0516.$

L'aire à peindre est de 6,0516 m^2 , soit 12,1023 m^2 pour les deux couches.

$12{,}1023 : 12 = 1{,}0086.$

Il faut environ 1 L de mélange de peinture.

$\dfrac{3}{4} \times 1 = 0{,}75. \quad \dfrac{1}{4} \times 1 = 0{,}25.$

Conclusion : Florence doit mélanger 0,75 L de cyan avec 0,25 L de jaune et ajouter une pointe de blanc.

• ***Pour la chambre 2*** (largeur mur : 3,22 m et largeur fenêtre : 0,93 m)

$3{,}22 \times 2{,}5 - 0{,}93 \times 1 = 7{,}12.$

L'aire à peindre est de 7,12 m^2 , soit 14,24 m^2 pour les deux couches.

$14{,}24 : 12 \approx 1{,}2.$

Il faut environ 1,2 L de mélange de peinture. $\dfrac{1}{2} \times 1{,}2 = 0{,}6.$

Conclusion : Florence doit mélanger 0,6 L de magenta avec 0,6 L de blanc et ajouter une pointe de noir.

• ***Pour la chambre 3*** (largeur mur : 2,86 m)

$2{,}86 \times 2{,}5 = 7{,}15.$

L'aire à peindre est de 7,15 m^2 , soit 14,3 m^2 pour les deux couches.

$14{,}3 : 12 \approx 1{,}2.$

Il faut environ 1,2 L de mélange de peinture.

$\dfrac{1}{4} \times 1{,}2 = 0{,}3. \quad \dfrac{1}{8} \times 1{,}2 = 0{,}15.$

Conclusion : Florence doit mélanger 0,6 L de blanc, 0,3 L de noir, 0,15 L de cyan et 0,15 L de jaune.

5. Le tipi

• Le sol a la forme d'un hexagone régulier dont les côtés mesurent 50 cm.

$\sqrt{50^2 - 25^2} \approx 44$

La distance entre deux côtés parallèles est d'environ 88 cm.

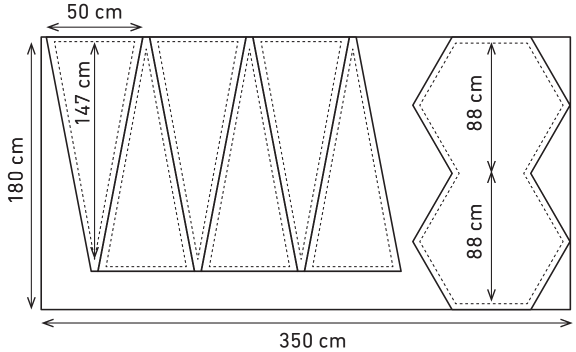
• Les six faces latérales sont des triangles isocèles dont la base mesure 50 cm.

$\sqrt{140^2 - 50^2} \approx 149$

Les côtés de même longueur de ces triangles mesurent environ 149 cm.

$\sqrt{149^2 - 25^2} \approx 147$

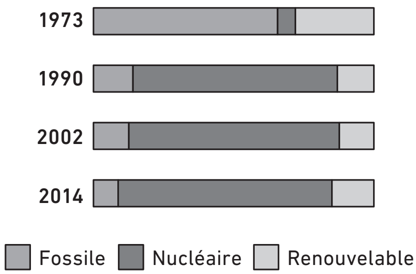
Dans ces triangles, la hauteur relative à la base mesure environ 147 cm.



Conclusion : Michel doit acheter environ 3,5 m de tissu, il va payer 17,47 €.
S'il choisit six armatures à section carrée, il doit ajouter 16,50 € soit un total de 33,97 €.
S'il choisit six armatures à section ronde, il doit ajouter 21 € soit un total de 38,47 €.

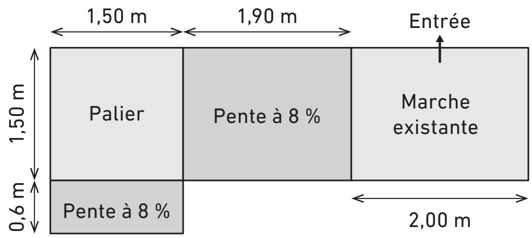
6. La production d'électricité en France

	1973		1990		2002		2014	
Énergies fossiles	119,5	65,5	48,2	11,5	55,7	10,0	27,0	5,0
Énergie nucléaire	14,8	8,1	313,7	74,6	436,8	78,1	415,9	77,9
Énergies renouvelables	48,1	26,4	58,3	13,9	66,7	11,9	91,1	17,1
	182,4	**100**	**420,2**	**100**	**559,2**	**100**	**534,0**	**100**

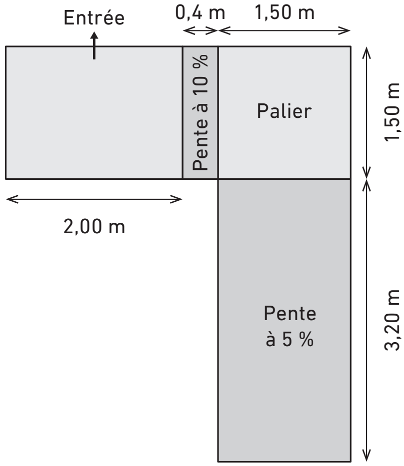


7. La rampe d'accès

Proposition 1



Proposition 2



II. Problèmes de synthèse

Problème 1. Le jeu de Franck

Chapitres utilisés : 7 et livret Algorithmique

Aire Cadre de jeu $= 200 \times 200 = 40\,000$ unités d'aire.
Aire Carré $= 20 \times 20 = 400$ unités d'aire.

$P\ (gagner\ une\ vie) = \dfrac{400}{40\,000} = \dfrac{1}{100}$;

$P\ (perdre\ une\ vie) = \dfrac{8 \times 400}{40\,000} = \dfrac{2}{25}$;

$P\ (récolter\ argent) = \dfrac{16 \times 400}{40\,000} = \dfrac{4}{25}$.

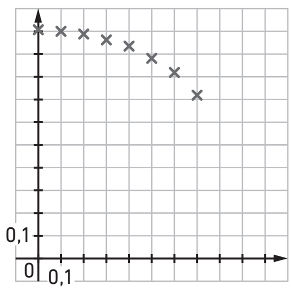
Problème 2. L'échelle

Chapitres utilisés : 4, 9 et 10

1. a. On démontre l'égalité en utilisant le théorème de Pythagore.
b. $x = 0{,}4$ et $y \approx 0{,}92$.
2. a. Lorsque $x = 0$, l'échelle est verticale.
b. x est maximum et vaut 1 quand y est minimum, c'est-à-dire égal à 0.
c.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y	1	0,99	0,98	0,95	0,92	0,87	0,8	0,71

3. a.



b. La trajectoire du milieu semble être un quart de cercle.

Problème 3. La distance entre deux immeubles

Chapitres utilisés : 4, 5, 8 et 10

On a deux triangles semblables, la distance d que l'on cherche vérifie $\dfrac{d}{d+340} = \dfrac{258}{300}$, soit $d = 0{,}86\,(d + 340)$.

Avec un solveur d'équation ou un tableur, on détermine $d \approx 2\,089$.

La distance entre les deux bâtiments est d'environ 2 089 cm, soit 20,89 m.

Problème 4. Les terrasses

Chapitres utilisés : 4, 5, 8 et 10

1. $8^2 + ¾ \times 9{,}6^2 = 133{,}12$. L'aire de la maison est de 133,12 m².

2. On note x la largeur commune aux terrasses, on cherche x pour que l'aire des terrasses soit égale à 133,12 m².

Soit $(19{,}2\,x + x^2) + (16\,x + x^2) = 133{,}12$,

ou encore $35{,}2\,x + 2\,x^2 = 133{,}12$.

En utilisant un solveur d'équation ou en faisant des tests avec un tableur, on trouve $x = 3{,}2$ m.

3. $\alpha = 180 - 117 = 63°$ (conservation de la mesure d'angle par rotation).

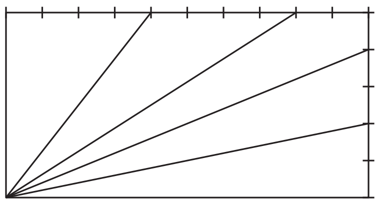
Problème 5. Le drapeau des Seychelles

Chapitres utilisés : 2 et 4

1. Si on pose a le tiers de la largeur du drapeau, l'aire totale du drapeau est $18a^2$ ($3a \times 6a$).

Le secteur rouge a une aire de $6a^2$; tous les autres ont une aire de $3a^2$ donc la proportion de l'aire du secteur rouge sur l'aire totale est de 1/3 ; elle est de 1/6 pour les autres.

2. a. et **b.** On trouve le découpage suivant :



Problème 6. La randonnée

Chapitres utilisés : 6 et 9

1. • ***Association « Les cabris »***

$$\frac{0{,}812}{0{,}5} = 1{,}624 \text{ h} = 1 \text{ h } 37 \text{ min } 26{,}4 \text{ s}.$$

• ***Association « Les marmottes »***

Distance parcourue $= 4 \times \sqrt{273^2 + \left(\dfrac{812}{4}\right)^2} \approx 1\,360$ m.

$\dfrac{1{,}36}{1} = 1{,}36 \text{ h} = 1 \text{ h } 21 \text{ min } 36 \text{ s}.$

Les marcheurs de l'association « Les marmottes » arriveront au sommet en premier.

2. a. Le dénivelé est de 463 m.

b. En utilisant plusieurs fois le théorème de Pythagore, on peut calculer les pentes demandées :

– pente itinéraire Cabris $= \dfrac{463}{667} \approx 0{,}69$;

– pente itinéraire Marmottes $= \dfrac{115{,}75}{320} \approx 0{,}36$.

Problème 7. Le tunnel

Chapitres utilisés : 6 et 9

1. Le rayon de la section du tunnel est 5,25 m.

Avec le théorème de Pythagore, on calcule les hauteurs réelles, différentes selon le sens de circulation.

Dans un sens de circulation :

$\sqrt{(5{,}25^2 - 4{,}25^2)} = \sqrt{9{,}5} \approx 3{,}08$ m. La hauteur annoncée sera 2,8 m car $3{,}08 - 0{,}3 < 2{,}8 < 3{,}08 - 0{,}2$

Dans l'autre sens de circulation :

$\sqrt{(5{,}25^2 - 2{,}75^2)} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ m. La hauteur annoncée sera 4,2 m car $4{,}47 - 0{,}3 < 4{,}2 < 4{,}47 - 0{,}2$.

2. $\dfrac{2}{3\,600} \times 50 \approx 0{,}0277$ km. La distance de sécurité est d'environ 28 m.

3. $\dfrac{0{,}48}{45} \times 3\,600 = 38{,}4$ s. À 45 km/h, il faut 38,4 s pour traverser le tunnel.

Comme un véhicule entre toutes les 4 s, il y a 10 véhicules en même temps dans le tunnel.

Problème 8. Le débit du tuyau d'arrosage

Chapitres utilisés : 3 et 6

1. 24 L/min = 24 dm³/min = 0,024 m³/min = 0,0004 m³/s, soit 4×10^{-4} m³/s.

2. a. Aire section $= \pi \times 9{,}5^2 \approx 284$ mm².

b. $\dfrac{4 \times 10^{-4}}{284 \times 10^{-6}} = \dfrac{4}{284} \times 10^2 \approx 1{,}4$ m/s.

3. Aire section $= \pi \times 1^2 \approx 3{,}14$ mm² ;

$\dfrac{4 \times 10^{-4}}{3{,}14 \times 10^{-6}} = \dfrac{4}{3{,}14} \times 10^2 \approx 127{,}3$ m/s.

Problème 9. La consommation d'électricité dans le monde

Chapitres utilisés : 3, 6 et 7

1. a. Consommation mondiale = 21 277,3 Twh.

Population mondiale = 7155 millions d'habitants.

Consommation par habitant $= \dfrac{21\,277{,}3 \times 10^{12}}{7\,155 \times 10^6} \approx 2{,}974 \times 10^6$ Wh

soit 2 974 kWh.

b. Consommation par habitant :

– E.U. Canada : $\dfrac{4\,655{,}4 \times 10}{352 \times 10^6} \approx 13\,226$ kWh ;

– Amérique latine : $\dfrac{1\,105{,}4 \times 10}{613 \times 10^6} \approx 1\,803$ kWh ;

– Europe et Russie : environ 6 031 kWh ;

– Asie : environ 2 356 kWh ;

– Afrique : environ 569 kWh ;

– Océanie : environ 7 384 kWh.

2. Consommation Afrique du Sud :

$6\,040 \times 53 \times 10^6 = 320\,120 \times 10^6$ kWh = 320,12 TWh.

Consommation pour le reste de l'Afrique :

$632{,}3 - 320{,}12 = 312{,}18$ TWh.

Population du reste de l'Afrique : $1111 - 53 = 1\,058$ millions d'habitants.

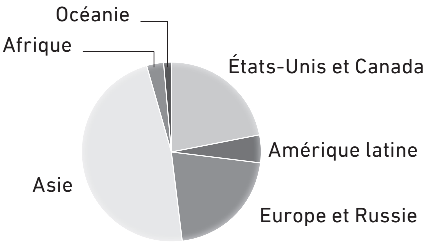
Consommation par habitant dans le reste de l'Afrique :

$\dfrac{312{,}18 \times 10^9}{1\,058 \times 10^6} \approx 295$ kWh

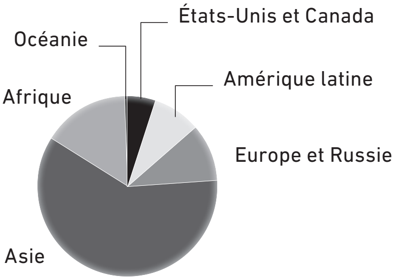
3.

	Part consommation mondiale	Degré	Part population mondiale	Degré
États-Unis et Canada	0,219	79°	0,049	18°
Amérique latine	0,052	18,5°	0,086	31°
Europe et Russie	0,210	76°	0,104	37°
Asie	0,476	171°	0,601	216°
Afrique	0,030	10,5°	0,155	56°
Océanie	0,013	5°	0,005	2°

Répartition de la consommation d'électricité par continent



Répartition de la population par continent



Problème 10. La fresque

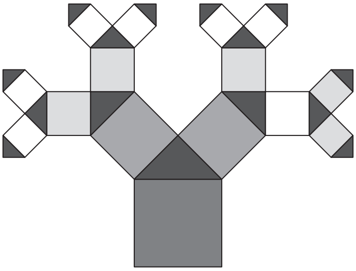
Chapitres utilisés : 2 et 6

1. a. À vérifier sur le cahier de l'élève.

b. Sur le plan, la fresque fait 16 cm de large sur 12 cm de haut, ce qui correspond en réalité à 4 m sur 3 m donc il est possible de reproduire la fresque.

2. a. $\text{Aire} = 1+\left(\frac{1}{2}\times 2\right)+\left(\frac{1}{4}\times 4\right)+\left(\frac{1}{8}\times 8\right)$
$+\left(\frac{1}{32}\times 8+\frac{1}{16}\times 4+\frac{1}{8}\times 2+\frac{1}{4}\right)=5 \text{ m}^2.$

b.



3. À réaliser avec un logiciel de géométrie dynamique.

Problème 11. Les différences de températures

Chapitres utilisés : 1 et 7

1.

	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin
2012	4,1	–0,8	9,5	10,6	16,8	18,7
2013	2,2	1,1	3,8	11,1	13,1	18,6
Différence	–1,9	1,9	–5,7	0,5	–3,7	–0,1

	Juill.	Août	Sept	Oct.	Nov.	Déc.
2012	19,7	21,1	16,1	10,5	6,9	4,5
2013	22,1	20,0	16,4	13,0	5,9	3,8
Différence	2,4	–1,1	0,3	2,5	–1	–0,7

2. a. Moyenne 2012 $=\frac{137{,}7}{12}=11{,}475$ °C ;

Moyenne 2013 $=\frac{131{,}1}{12}=10{,}925$ °C.

b. On calcule la moyenne des différences ou la différence des moyennes, on obtient –0,55°.

3. Etendue 2012 = 21,1 – (–0,8) = 21,9 °C ;

étendue 2013 = 22,1 – 1,1 = 21 °C.

Problème 12. Le sablier

Chapitres utilisés : 4, 5, 6, 10 et 11

1. Il n'y a pas proportionnalité entre la hauteur de sable et le temps d'écoulement.

2. a. On peut calculer les rayons successifs des cônes (0,75 ; 1,5 ; 2,5 et 3 cm) grâce aux propriétés des triangles semblables.

Niveau 1	Niveau 2
$\text{Vol1}=\frac{15}{64}\pi=0{,}234375\pi$	$\text{Vol2}=\frac{120}{64}\pi=1{,}875\pi$
Niveau 3	**Niveau4**
$\text{Vol3}=\frac{405}{64}\pi=6{,}328125\pi$	$\text{Vol4}=\frac{960}{64}\pi=15\pi$

Il y a proportionnalité entre le volume et le temps d'écoulement.

b. Débit $=\frac{15\pi\times 3\,600}{960}=56{,}25\pi\approx 177\text{ cm}^3/\text{h}$.

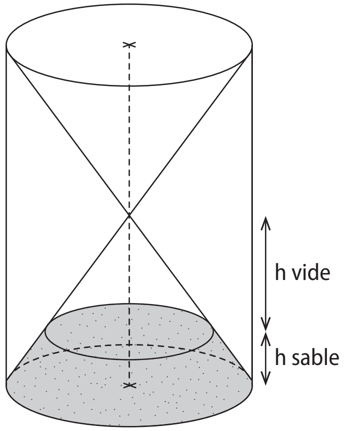
3. Pour mesurer 8 min soit 480 s, il faut un volume de sable égal à la moitié du volume de chacun des cônes composant le sablier soit Vol4/2 = $7{,}5\pi$ cm³ ($\approx 23{,}56$ cm³).

On cherche la hauteur h_{vide} tel que :

$$\frac{\pi\times r^2\times h_{vide}}{3}=7{,}5\pi \quad (\text{avec } r=0{,}6\,h_{vide}).$$

Avec un tableur, par exemple, on détermine $h_{vide}\approx 3{,}97$ cm donc $h_{sable}\approx 5-3{,}97$.

La hauteur du sable est donc d'environ 1 cm.



Problème 13. Le raid

Chapitres utilisés : 5 et 6

1. La distance à parcourir à VTT et à pied est de 10 km.

2. • Temps total $<$ 2h15 min soit 135 min

Les chicas	134 min 23 s
Twin sisters	142 min 08 s $>$ 135 min
Run for fun	107 min 47 s
Bob and Jo	138 min 54 s $>$ 135 min
Les dératés	131 min 47 s
Les touristes	119 min 50 s
Courtoujours	130 min 05 s

Les équipes « Twin sisters » et « Bob and Jo » ne sont pas sélectionnées.

• Parcours VTT : $V_{VTT} > 20$ km/h donc les 10 km doivent être parcourus en moins de 30 min

L'équipe « les dératés » n'est pas sélectionnée.

• Parcours kayak : $V_{kayak} > 6$ km/h donc les 5 km doivent être parcourus en moins de 50 min

L'équipe « les Chicas » n'est pas sélectionnée.

• Parcours Course à pied : $V_{Course} > 12$ km/h donc les 10 km doivent être parcourus en moins de 50 min

L'équipe « les Courtoujours » n'est pas sélectionnée.

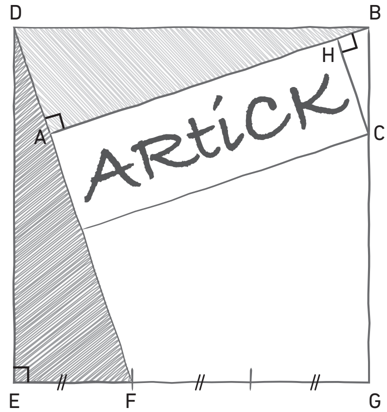
• Les équipes financées sont donc « Run for fun » et « Les touristes ».

Problème 14. Le logo

Chapitres utilisés : 9 et 10

Les triangles DEF, ADB et BHC sont semblables (mêmes mesures d'angles)

Comme $\frac{EF}{ED} = \frac{EF}{EG} = \frac{1}{3}$, alors $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{3}$ et donc HB = 1 et AB = 10 + 1 = 11.



De même $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$, soit $\frac{AD}{11} = \frac{1}{3}$ et donc $AD = \frac{11}{3}$.

Puis dans le triangle ADB rectangle en A, grâce au théorème de Pythagore on a $BD = \sqrt{\frac{1\,210}{9}} \approx 11{,}6$ cm.

Problème 15. Le presse-papier

Chapitres utilisés : 2, 3, 6 et 11

• Volume Coin $= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{10}{3}\right)^2\right) \times \frac{10}{3} = \frac{500}{81}$ cm^3,

soit environ 6,17 cm^3.

• Volume Presse-papier $= 10^3 - 8 \times \frac{500}{81} = \frac{77\,000}{81}$ cm^3,

soit environ 951 cm^3.

Masse volumique $= \frac{609 \times 10^{-3}}{951 \times 10^{-6}} = \frac{203}{317} \times 10^3 \approx 640$ kg/m^3.

Le presse-papier est en érable.

N° projet : 10219476 - Dépôt légal : août 2016 - Imprimé en France par Laballery