COLLECTION MYRIADE

maths

CYCLE 4

3^e

Sous la direction de
Marc Boullis

Marc Boullis
Maxime Cambon
Yannick Danard
Virginie Gallien
Élodie Herrmann
Isabelle Meyer
Yvan Monka
Stéphane Percot

Bordas

sommaire

Direction éditoriale : Julien Barret
Édition : Béatrice Jovial-Vernet et Marielle Muret-Baudoin
Couverture : Jean-François Saada et Pierre Taillemite
Fabrication : Jean-Philippe Dore
Réalisation et schémas : Soft Office

Livret Algorithmique et programmation

I. Le programme

Algorithmique et programmation

Au cycle 4, les élèves s'initient à la programmation, en développant dans une démarche de projet quelques programmes simples, sans viser une connaissance experte et exhaustive d'un langage ou d'un logiciel particulier. En créant un programme, ils développent des méthodes de programmation, revisitent les notions de variables et de fonctions sous une forme différente et s'entrainent au raisonnement.

Attendu de fin de cycle

- Écrire, mettre au point et exécuter un programme simple.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
■ Décomposer un problème en sous-problèmes afin de structurer un programme ; reconnaitre des schémas. ■ Écrire, mettre au point (tester, corriger) et exécuter un programme en réponse à un problème donné. ■ Écrire un programme dans lequel des actions sont déclenchées par des événements extérieurs. ■ Programmer des scripts se déroulant en parallèle. – Notions d'algorithme et de programme. – Notion de variable informatique. – Déclenchement d'une action par un évènement, séquences d'instructions, boucles, instructions conditionnelles.	■ Jeux dans un labyrinthe, jeu de Pong, bataille navale, jeu de nim, tic tac toe. ■ Réalisation de figure à l'aide d'un logiciel de programmation pour consolider les notions de longueur et d'angle. ■ Initiation au chiffrement (Morse, chiffre de César, code ASCII…). ■ Construction de tables de conjugaison, de pluriels, jeu du cadavre exquis… ■ Calculs simples de calendrier. ■ Calculs de répertoire (recherche, recherche inversée...). ■ Calculs de fréquences d'apparition de chaque lettre dans un texte pour distinguer sa langue d'origine : français, anglais, italien, etc.

II. Contexte du livret

L'année 2016-2017 sera une année de transition avec un grand nombre d'élèves novices en algorithmique. Cela évoluera au fil des années : les élèves auront abordé dans le thème *Espace et géométrie* du cycle 3 la programmation de déplacements ainsi que celle de constructions géométriques. Ils l'auront poursuivi en 5e dans le thème *Algorithme et programmation*, développant ainsi les compétences qui décrivent l'activité mathématique : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer et communiquer.

Les activités proposées ici permettront une approche aussi bien adaptée au débutant qu'à celui ayant déjà quelques notions de programmation.

Le livret est découpé en deux grandes parties. Dans une première partie, les concepts forts (instructions, boucles, variables, instructions conditionnelles, etc.) de l'algorithmique sont étudiés soit en mode *débranché*, soit en mode *branché* au travers de petits exercices simples.

En mode *débranché*, les élèves peuvent travailler chez eux ou en classe sur leur cahier, tandis qu'en mode *branché* ils utiliseront le logiciel Scratch pour réaliser les exercices proposés.

Dans la seconde partie du livret sont proposés des projets qui invitent les élèves à synthétiser les notions abordées et qui pourront servir de supports à des traces écrites basées sur des usages en situation. Les projets sont découpés en plusieurs étapes, permettant ainsi à chacun d'atteindre des objectifs intermédiaires dans sa réalisation. Les projets ne sont pas pour autant fermés et des invitations à améliorer le résultat obtenu sont présentes afin de stimuler l'imagination et la réflexion des élèves, mais également de permettre au professeur de gérer l'hétérogénéité de la classe.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

L'utilisation du logiciel Scratch au collège a été préconisée par l'Éducation Nationale pour diverses raisons, en particulier sa facilité d'appropriation, la puissance de programmation qu'il contient et sa gratuité.

On peut l'utiliser en ligne (https://scratch.mit.edu/) ou en le téléchargeant (https://scratch.mit.edu/scratch2download/).

Tous les fichiers Scratch liés au livret sont disponibles gratuitement sur le site www.bordas-myriade.fr.

Séquence 1	■ Exercice 4 : programme Scratch ■ Exercice 5 : 26 programmes Scratch
Séquence 2	■ Exercice 7 : programme Scratch ■ Exercice 8 : programme Scratch ■ Exercice 9 : 2 programmes Scratch
Séquence 3	■ Exercice 12 : 3 programmes Scratch ■ Exercice 13 : programme Scratch ■ Exercice 14 : programme Scratch
Séquence 4	■ Exercice 17 : programme Scratch ■ Exercice 18 : programme Scratch
Séquence 5	■ Exercice 20 : 3 programmes Scratch ■ Exercice 21 : programme Scratch
Projets	■ Projet 1 : 6 programmes Scratch ■ Projet 2 : 6 programmes Scratch ■ Projet 3 : 6 programmes Scratch ■ Projet 4 : 6 programmes Scratch ■ Projet 5 : programme Scratch

IV. Corrections et intentions pédagogiques

Séquence 1 – Instructions et algorithme

Le but de cette séquence est de faire prendre conscience que l'on peut, en ordonnant une suite d'instructions, schématiser une action ou faire exécuter à un programme ou un robot une suite d'actions précises.

1 Une recette algorithmique Niveau 1

Différentes situations du quotidien amènent à refaire les mêmes actions.

Voici un algorithme d'organisation d'une recette de cuisine :

Lire la recette

Acheter les ingrédients
(farine, beurre, œufs, sucre, lait, huile)

Mettre la farine dans un saladier et former un puits

Mettre les œufs entiers, le sucre, l'huile et le beurre

Mélanger délicatement en ajoutant le lait

Faire chauffer une poêle en y mettant un peu d'huile

Faire cuire les crêpes

Déguster !

2 Le repas de l'ours Niveau 2

Cet exercice de repérage offre une entrée possible dans l'algorithmique grâce aux instructions « monter », « descendre », « à droite », « à gauche ».

1. ▲ ▶ ▶ ▲ ▶ ▶ ▼ ▼ ▼ ◀

2. ▲ ▲ ▲ ▶ ▶ ▼ ▼ ▼ ▶ ▶ ▲ ▲ ▲

3. ▲ ▲ ▲ ▶ ▶ ▶ ▶ ▼ ▼ ▶

ou ▲ ▲ ▲ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▼ ▼ ◀

3 Dans mon jardin Niveau 3

Cet exercice permet de représenter une situation de vie quotidienne de façon algorithmique.

Acheter l'arbre

Acheter le(s) sac(s) de terreau

Creuser un trou

Y déposer l'arbre et le terreau

Tasser la terre

Arroser

4 Cache-cache avec un triangle Niveau 1

Pour cet exercice, il faut se servir du point (0 ; 0) non pas comme le sommet de l'angle droit, mais comme un des sommets de l'hypoténuse. On part de ce sommet et on revient en ligne droite vers celui-ci pour tracer l'hypoténuse.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

Le programme complet (questions **1.** à **3.**) est :

```
quand drapeau cliqué
aller à x: 0 y: 0
s'orienter à 90
effacer tout
montrer
dire Je vais tracer un triangle rectangle pendant 2 secondes
stylo en position d'écriture
mettre la couleur du stylo à 50
avancer de 100
tourner ↺ de 90 degrés
mettre la couleur du stylo à 100
avancer de 80
mettre la couleur du stylo à 150
aller à x: 0 y: 0
relever le stylo
cacher
```

4. Pour tracer chaque côté du triangle rectangle d'une couleur différente, on peut utiliser l'instruction :

```
choisir la couleur ■ pour le stylo
```

5 L'alphabet Niveau 2

Dans cet exercice, les élèves vont pouvoir mettre en œuvre leurs connaissances de la manipulation du stylo.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

1. Un programme possible :

```
quand drapeau cliqué
effacer tout
choisir la taille 5 pour le stylo
s'orienter à 90
aller à x: -50 y: 0
stylo en position d'écriture
avancer de 100
aller à x: 0 y: 0
tourner ↻ de 90 degrés
avancer de 100
relever le stylo
```

2. a. et b. Un programme possible :

```
quand drapeau cliqué
effacer tout
choisir la taille 5 pour le stylo
s'orienter à -90
aller à x: -30 y: 60
stylo en position d'écriture
aller à x: -60 y: 20
relever le stylo
aller à x: 0 y: 0
stylo en position d'écriture
avancer de 80
tourner ↺ de 90 degrés
avancer de 50
tourner ↺ de 90 degrés
avancer de 60
tourner ↻ de 180 degrés
avancer de 60
tourner ↺ de 90 degrés
avancer de 50
tourner ↺ de 90 degrés
avancer de 80
relever le stylo
```

Pour placer l'accent sur le E, les élèves seront obligés de relever le stylo et de le reposer, ce qui n'était pas une obligation jusque-là.

c. et **d.** Plusieurs scripts seront possibles mais il n'est pas obligatoire de relever le stylo. Il est cependant préférable de le faire pour avoir des scripts plus courts et plus « propres ».

Séquence 2 – Utilisation des variables

La notion de variable en algorithmique et en programmation est proche mais aussi différente de la notion de variable en mathématiques. Il faut donc la faire découvrir aux élèves et montrer comment elle est utilisée pour stocker des informations.

6 Un jeu de cartes Niveau 1

Ce jeu permettra de découvrir la notion de variable : un nouveau score remplace le score précédent, de la même façon le *nombre de tours évolue en remplaçant le nombre de tours précédent.*

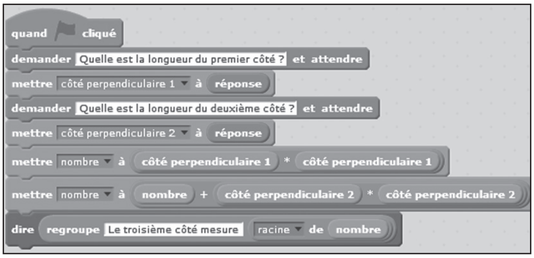
1. Le nombre de variables est : nombre de joueurs + 1.

2. La seule solution est une répartition as/as/as/2.
a. Elsa avait un 2.
b. Les autres avaient tous un as.

7 En pensant à Pythagore Niveau 1

On trouve ici un prétexte mathématique à l'utilisation de plusieurs variables. En effet, comme il y a deux valeurs à stocker, on est obligé de créer des variables pour conserver ces valeurs.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



8 Calculs dans un rectangle Niveau 2

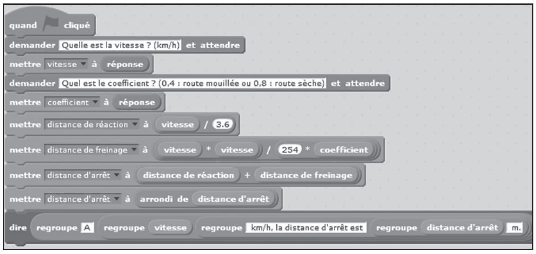
Dans cet exercice, on prend un nouveau prétexte mathématique simple pour faire travailler les élèves sur la notion de variable.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

9 La distance d'arrêt Niveau 3

Cet exercice permet de voir à nouveau l'utilité des variables. La conclusion aura de plus une portée civique.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



Ce programme peut être amélioré à l'aide d'instructions conditionnelles pour ne pas avoir à demander le coefficient d'adhérence mais juste si la route est sèche ou mouillée.

Séquence 3 – Utilisation des boucles

Un des grands principes de la programmation est l'utilisation de boucles. En effet, de nombreux algorithmes nécessitent de répéter des actions un certain nombre de fois ou jusqu'à ce qu'une condition soit réalisée.
Les élèves vont donc d'abord rencontrer ces boucles dans des environnements connus du quotidien, puis les utiliser pour décrire des situations, puis pour programmer afin de rendre leurs algorithmes simples et efficaces.
En géométrie, la boucle mettra en évidence des propriétés de figures.

10 À la pêche ! Niveau 1

Ce premier exercice simple permettra de montrer comment une boucle peut simplifier une suite d'instructions.

1. Répéter 2 fois ▶ ▶ ▼ ▼

2. Répéter 2 fois ▶ ▶ ▶ ▼

3. Répéter 2 fois ▼ ▶ ▶

4. Répéter 17 fois ▶

5. Répéter 2 fois ▶

Répéter 8 fois ▼

11 En natation Niveau 2

Dans cet exercice, on demande aux élèves de représenter à l'aide de boucles certaines épreuves sportives ce qui leur permettra de mieux assimiler cette notion.

1. Répéter 4 fois
Répéter 4 fois traverser le bassin
Changer de nageur

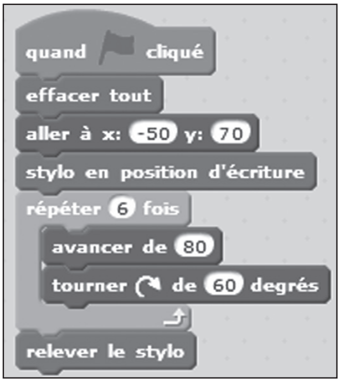
2. Répéter 10 fois
Répéter 2 fois traverser le bassin
Changer de nageur

12 Des polygones en boucles Niveau 1

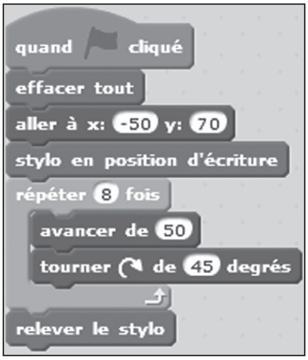
En utilisant Scratch pour tracer des polygones, on est amené à utiliser les boucles afin de simplifier grandement les scripts utilisés.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

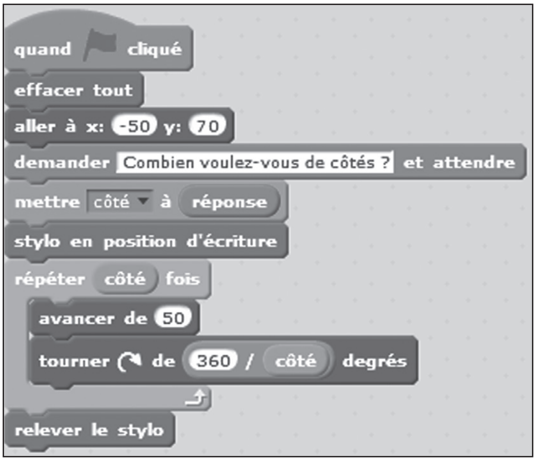
1. Hexagone



2. Octogone de côté 50

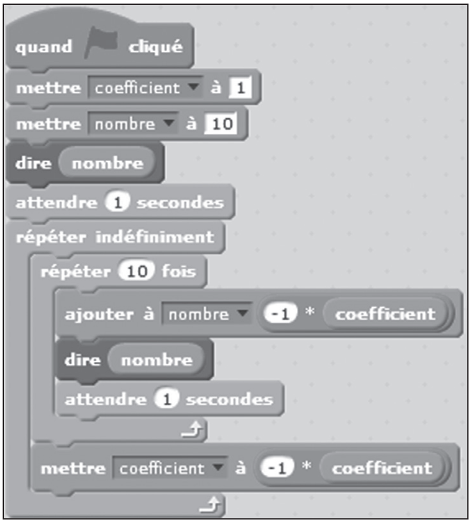


3. Polygone



13 Attention au départ ! Niveau 2

Les comptes à rebours sont souvent utilisés dans les jeux, en programmer permettra aux élèves d'acquérir cette compétence.
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



14 Les créneaux Niveau 3

En utilisant Scratch pour effectuer des tracés, on peut, à l'aide de boucles, effectuer des tracés répétitifs.
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

Séquence 4 – Utilisation des instructions conditionnelles

Dans cette séquence, il s'agit de mettre en œuvre la logique associée à un test de type « Si…Alors… » ou du type « Si…Alors…Sinon ». Il faut donc trouver un argument qui permette d'écrire le test : on développe alors plus particulièrement les compétences chercher et raisonner. La mise en œuvre renvoie davantage sur modéliser et communiquer.

15 Case après case Niveau 1

Dans cet exercice, l'utilisation d'instructions conditionnelles permettra de raccourcir et de rationaliser les suites d'instructions à donner.

1. Répéter jusqu'à « poisson atteint »
Avancer d'une case
Si pas de case devant, Alors tourner à droite.

2. Répéter jusqu'à « poisson atteint »
Avancer d'une case
Si pas de case devant, Alors
Si pas de case à gauche, Alors tourner à droite
Sinon tourner à gauche

16 La table de 3 n'est pas en reste ! Niveau 2

Cet exercice permet d'illustrer simplement ce qu'est une instruction conditionnelle.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

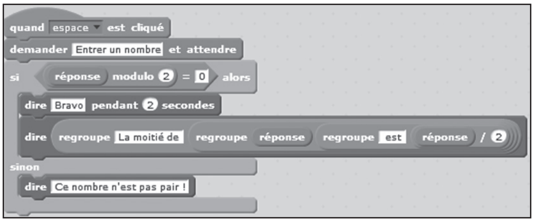
1. Entrer un nombre
Si le reste de la division par 3 est zéro, Alors diviser par 3
Sinon ajouter 1

2. Au bout de 12 tours, on obtient 1, mais également au bout de 15 tours et de 45 tours car ensuite les nombres 1-2-3 s'enchainent indéfiniment.

17 Faire les choses à moitié Niveau 1

Cet exercice permet de programmer à l'aide d'une instruction conditionnelle une situation à deux issues.

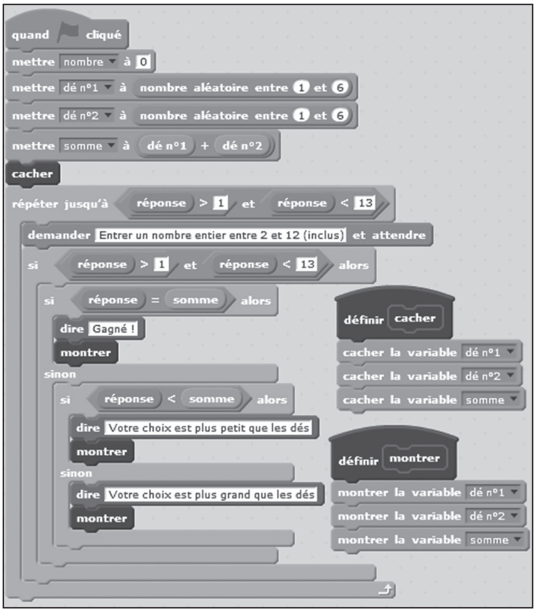
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



18 Allez l'aléa ! Niveau 2

Cet exercice permet de programmer une situation classique de probabilité qui pourra d'ailleurs être utilisée pour le chapitre Statistiques et probabilités.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



Remarque : les blocs ne sont là que pour le visuel, on peut programmer sans les utiliser !

Séquence 5 – Utilisation d'un bloc d'instructions paramétré

Les blocs d'instructions permettent de créer des sous-programmes que l'on pourra utiliser à plusieurs reprises dans le programme principal ce qui facilite la lecture et donc la compréhension du script. Ils sont présentés dans le manuel de 4e. Les blocs paramétrés que l'on présente ici offrent une évolution qui permet une approche plus élaborée : le fonctionnement peut être comparé à celui d'une fonction en mathématiques, voire d'une fonction à plusieurs variables.

19 Déplacements au hasard Niveau 1

Les élèves vont être amenés ici à considérer l'intervention de paramètres dans les blocs qu'ils peuvent créer.

1. a. ◄ ◄ ◄ ◄ ◄ ◄ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲

b. ► ▲ ▲.

2. a. (2 ; 3).

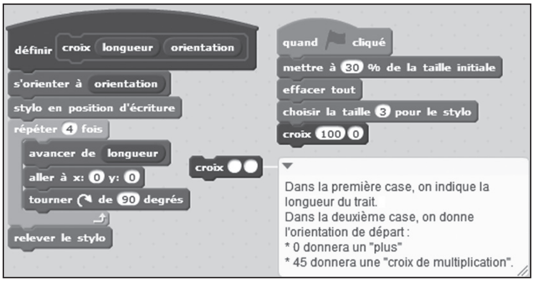
b. (3 ; 4).

Cette question offre un cadre ludique à un concept délicat : l'utilisation de paramètres.

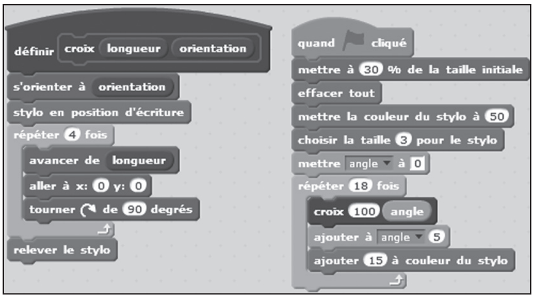
20 Des croix Niveau 1

Les deux premières figures s'obtiennent en appelant une seule fois le bloc paramétré mais en changeant son orientation.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



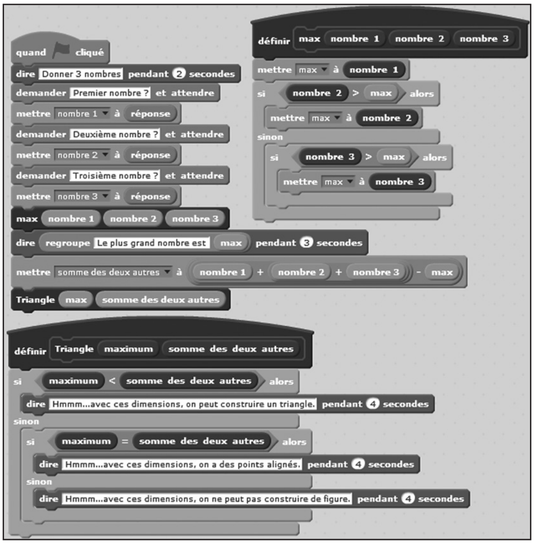
Pour tracer la dernière figure, il faut faire appel plusieurs fois au bloc paramétré.



21 Quel cirque ! Maximus ! Niveau 2

Les algorithmes de tri sont de bonnes sources de programmation. En voici un premier sur trois nombres pour stimuler l'imagination des élèves.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



Projet 1 – Le chiffre de César

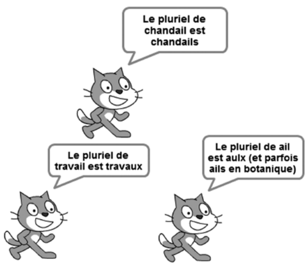
Ce grand classique du cryptage, présent dans les programmes, permet une entrée à la fois alphabétique et numérique : il offre en particulier une utilisation intéressante du reste de la division avec l'instruction modulo, que l'on retrouve avec l'instruction MOD() sur tableur.

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

Projet 2 – Pluriel de noms communs

Ce projet permet de faire un lien avec le français : c'est un exemple de travail permettant une différenciation au sein de la classe. Le pluriel « classique » nécessite l'ajout d'un « s » final mais les cas particuliers nombreux permettent l'utilisation de tests conditionnels et de boucles.

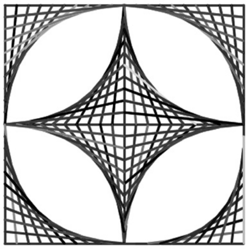
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



Projet 3 – Quand deux blocs débloquent !

Les représentations tournées vers les constructions géométriques sont une source de programme. Celui-ci montre l'intérêt des blocs paramétrés pour réduire la longueur d'un programme. S'il rend la programmation un peu délicate, le bloc paramétré permet de simplifier la lecture d'un script et donc sa compréhension par un observateur extérieur !

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



Projet 4 – Le mage et la grenouille

Sous la forme d'un jeu vidéo, on retrouve ici la possibilité de réutiliser de nombreuses fonctionnalités qui auront été vues précédemment. On peut par ailleurs laisser les élèves personnaliser ce programme à partir de personnages ou d'arrière-plans qu'ils auront adapté à leurs goûts. Ces personnalisations sont en général gage d'adhésion au projet !

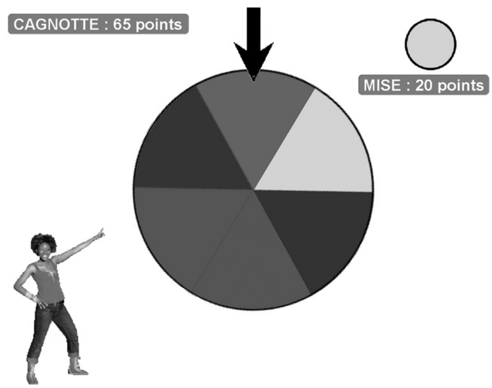
Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.

Projet 5 – Un jeu sérieux : la roue tourne

Il s'agit ici de réaliser, à l'aide d'un algorithme, un jeu de hasard bien connu : une roue qui tourne.

La programmation permet de réutiliser de multiples notions !

Fichiers Scratch disponibles sur www.bordas-myriade.fr.



chapitre 1

Arithmétique

I. Le programme

Thème A – Nombres et calculs

Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maîtrise des procédures de calcul. Les différentes composantes de ce thème sont reliées entre elles. Les élèves manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils prennent conscience du fait qu'un même nombre peut avoir plusieurs écritures (notamment écritures fractionnaire et décimale). Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour résoudre des problèmes faisant intervenir des équations ou inéquations du premier degré. À l'occasion d'activités de recherche, ils peuvent rencontrer la notion de nombres irrationnels, par exemple lors d'un travail sur les racines carrées.

Attendu de fin de cycle

- Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers	
■ **Déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier.** ■ **Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.** – Division euclidienne (quotient, reste). – Multiples et diviseurs. – Notion de nombres premiers.	■ Recourir à une décomposition en facteurs premiers dans des cas simples. ■ Exploiter tableurs, calculatrices et logiciels, par exemple pour chercher les diviseurs d'un nombre ou déterminer si un nombre est premier. ■ Démontrer des critères de divisibilité (par exemple par 2, 3, 5 ou 10) ou la preuve par 9. ■ Étudier des problèmes d'engrenages (par exemple braquets d'un vélo, rapports de transmission d'une boîte de vitesses, horloge), de conjonction de phénomènes périodiques (par exemple éclipses ou alignements de planètes).

** En **gras** : ce qui est traité dans ce chapitre.*

II. Contexte du livret

La notion de diviseur et de multiple d'un nombre entier est travaillée depuis le cycle 3.
Elle est souvent retravaillée au travers des activités mentales ou rapides au début du cycle 4.
Ce chapitre permet à la fois d'asseoir les compétences des élèves sur les calculs mettant en jeu des nombres entiers mais aussi de découvrir la notion de nombres premiers, de nouvelles techniques de recherche de multiples et de diviseurs et de nouvelles méthodes pour rendre une fraction irréductible.
L'usage de la calculatrice et du tableur sera développé dans ce chapitre.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Déterminer les diviseurs d'un nombre ■ Vidéo « *Je comprends* » : Rendre une fraction irréductible
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Tableur ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et tableur) et leurs tutoriels vidéos
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Le nouveau jeu de Julien

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Trouver les diviseurs communs à deux nombres

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Cette activité permet de retravailler la notion de diviseur et met en avant une méthode pour trouver tous les diviseurs d'un nombre.

• ***Correction***

$54 = 1 \times 54 = 2 \times 27 = 3 \times 18 = 6 \times 9$ donc la liste des diviseurs de 54 est 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 et 54.
$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$ donc la liste des diviseurs de 36 est 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.
Les diviseurs communs à 54 et 36 sont 1, 2, 3, 6 et 9.

Activité 2. Jouer au jeu du Juniper Green

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Ce jeu a été créé par Richard Porteous, enseignant à l'école de Juniper Green, auquel il doit son nom. Il s'est réellement fait connaître grâce à Ian Stewart, qui en décrit les règles dans la revue *Pour la Science*, en juillet 1997. Ce jeu permet de faire jongler avec les diviseurs et les multiples de nombres mais aussi de développer le raisonnement logique pour aller vers une stratégie gagnante. Une seule permettra de faire apparaitre les nombres qui n'ont pas d'autre diviseur que 1 et eux-mêmes : les nombres premiers.

Activité 3. Trouver la liste des nombres premiers : le crible d'Ératosthène

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Le crible d'Ératosthène est un procédé qui permet de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain entier naturel donné N. On a choisi ici $N = 100$.

Cette méthode met en œuvre un algorithme qui procède par élimination : on supprime de la grille tous les entiers multiples d'un entier ; en supprimant tous ces multiples, à la fin il ne restera que les entiers qui ne sont multiples d'aucun entier, et qui sont donc les nombres premiers.

• ***Correction***

On obtient la liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Activité 4. Décomposer en facteurs premiers et rendre une fraction irréductible

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

La première partie de cette activité permet de revoir une technique déjà étudiée en début de cycle 4 pour la simplification de fraction : la reconnaissance d'un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.
La seconde partie amène les élèves à décomposer les entiers en produits de facteurs premiers.
Cette méthode permet de rendre irréductible une fraction en identifiant les facteurs premiers communs au numérateur et au dénominateur.

• ***Correction***

$600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5^2$
$840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$
et donc $\frac{600}{840} = \frac{5}{7}$.

■ Objectif 1. Utiliser des diviseurs, des multiples et des nombres premiers

Je m'entraine

1 **a.** Non. **b.** Non, 4 possède 3 diviseurs.
c. Oui. **d.** Non, c'est 28.

2 **a.** 12 est divisible par 2, par 4 mais pas par 5.
b. 14 est divisible par 2 mais ni par 4 ni par 5.

c. 15 est divisible par 5 mais ni par 2 ni par 4.
d. 24 est divisible par 2, par 4 mais pas par 5.
e. 60 est divisible par 2, par 4 et par 5.
f. 110 est divisible par 2, par 4 et par 5.
g. 120 est divisible par 2, par 4 et par 5.
h. 245 est divisible par 5 mais ni par 2 ni par 4.

3 **a.** 32 n'est divisible ni par 3, ni par 9.
b. 39 est divisible par 3 mais pas par 9.
c. 45 est divisible par 3 et par 9.
d. 72 est divisible par 3 et par 9.
e. 74 n'est divisible ni par 3, ni par 9.
f. 129 est divisible par 3 mais pas par 9.
g. 139 n'est divisible ni par 3, ni par 9.
h. 939 est divisible par 3 mais pas par 9.

4 Les nombres premiers de cette liste sont b (13), e (17), g (19).

5 **a.** Les diviseurs de 10 sont 1, 2, 5 et 10.
b. Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.
c. Les diviseurs de 16 sont 1, 2, 4, 8 et 16.
d. Les diviseurs de 25 sont 1, 5 et 25.

6 **a.** Les diviseurs de 50 sont 1, 2, 5, 10, 25 et 50.
b. Les diviseurs de 60 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60.
c. Les diviseurs de 70 sont 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 et 70.
d. Les diviseurs de 100 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 et 100.

7 42 ; 102 ; 138.

8 C'est le nombre 13.

9 C'est le nombre 63.

10 Par exemple, les nombre 4, 9 et 25.

11 Par exemple, les nombres 6, 8, 10 et 15.

12 Pour 7 : 7, 14, 21.
Pour 11 : 11, 22, 33.
Pour 15 : 15, 30, 45.
Pour 19 : 19, 38, 190.

13 **1.** 95 et 19.
2. 1 et 3.

Je résous des problèmes simples

14 C'est le nombre 12 (c).

15 C'est le nombre 29 (e) car il est premier.

16 C'est le nombre 16.

17 Je suis 1 518.

18 Les diviseurs communs à 27 et 90 sont 1, 3 et 9.
Les diviseurs communs à 48 et 72 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.
Les diviseurs communs à 80 et 100 sont 1, 2, 4, 5, 10 et 20.

19 On peut prévoir 1, 2, 3 ou 6 corbeilles.

20 **a.** Le plus petit multiple commun à 30 et 80 est 240.
b. Le plus petit multiple commun à 25 et 60 est 300.
c. Le plus petit multiple commun à 18 et 21 est 126.

21 **1.** Il faut 17 cartons pour transporter tous les livres.
2. Il y aura 20 livres dans le carton non plein.

22 $6\,850 = 22 \times 300 + 250$ donc chaque homme reçoit 22 pièces d'or et Barbe-noire en reçoit 250.

23 On cherche un nombre N.
La première année, il reste 37 ballons, donc les N enfants se partagent équitablement $397 - 37 = 360$ ballons. L'entier N est donc un diviseur de 360.
La deuxième année, il reste 13 ballons donc les N enfants se partagent équitablement $598 - 13 = 585$ ballons. L'entier N est donc aussi un diviseur de 585.
L'entier N est donc un diviseur commun de 360 et de 585. Or on cherche le plus grand entier N possible. De ce fait, N est le plus grand diviseur commun à 360 et 585. On peut le trouver en décomposant 360 et 585 en facteur premier, ou à l'aide d'algorithmes. C'est 45.

24 Il y avait 59 danseurs.

25 On cherche tous les diviseurs de 420 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 24 ; 30 ; 40 ; 60 et 120.

Elle peut donc les ranger par paquet de 1, de 2, de 3…

■ Objectif 2. Décomposer en produit de facteurs premiers et rendre une fraction irréductible

Je m'entraine

26 Les fractions irréductibles sont :
a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{5}{9}$ **d.** $\frac{9}{11}$ **f.** $\frac{9}{13}$ **g.** $\frac{10}{11}$ **i.** $\frac{10}{13}$

27 Les fractions irréductibles sont :
a. $\frac{7}{12}$ **d.** $\frac{11}{12}$

28 Les fractions irréductibles sont :
a. $\frac{5}{9}$ **d.** $\frac{33}{35}$

29 Les fractions irréductibles sont :
a. $\frac{15}{8}$ **c.** $\frac{20}{33}$
Pour les autres : **b.** $\frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ et **d.** $\frac{21}{33} = \frac{7}{11}$

30 Les fractions irréductibles sont :
a. $\frac{4}{5}$ **c.** $\frac{4}{9}$
Pour les autres : **b.** $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ et **d.** $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

31 a. $\frac{72}{42}=\frac{12}{7}$ b. $\frac{120}{210}=\frac{4}{7}$
c. $\frac{900}{1200}=\frac{3}{4}$ d. $\frac{255}{285}=\frac{17}{19}$

32 a. $\frac{532}{476}=\frac{19}{17}$ b. $\frac{540}{1485}=\frac{4}{11}$
c. $\frac{8\,897}{15\,252}=\frac{7}{12}$ d. $\frac{14\,874}{14\,606}=\frac{111}{109}$

33 a. $\frac{444}{814}=\frac{6}{11}$ b. $\frac{814}{444}=\frac{11}{6}$ c. $\frac{4\,440}{8140}=\frac{6}{11}$

34 a. $72=2^3\times 3^2$ b. $144=2^4\times 3^2$
c. $242=2\times 11^2$ d. $2\,205=3^2\times 5\times 7^2$

35 $\frac{84}{126}=\frac{2}{3}$

Je résous des problèmes simples

36 a. $\frac{765}{1105}=\frac{9}{13}$ b. $\frac{1105}{765}=\frac{13}{9}$ c. $\frac{76\,500}{110\,500}=\frac{9}{13}$

37 1 035 et 1 215 ne sont pas premiers entre eux car ils sont tous les deux divisibles par 5.
$1\,035=3^2\times 5\times 23$ et $1\,215=3^5\times 5$
$\frac{1035}{1215}=\frac{23}{27}$

38 $A=\frac{0{,}18}{4{,}2}=\frac{18}{420}=\frac{9}{210}=\frac{3}{70}$
$B=\frac{22+3}{94+1}=\frac{25}{95}=\frac{5}{19}$
$C=\frac{2{,}1\times 10^8}{490\times 10^6}=\frac{2{,}1\times 10^2}{490}=\frac{210}{490}=\frac{21}{49}=\frac{3}{7}$
Donc $A<B<C$.

39 $A=\frac{7{,}2}{0{,}72-0{,}16}=\frac{7{,}2}{0{,}56}=\frac{720}{56}=\frac{90}{7}$
$B=\frac{2\times 3^2\times 11}{2\times 3\times 11^2}=\frac{3}{11}$
$C=\frac{1}{2\times 5}=\frac{1}{10}$
Donc $A>B>C$.

40 **1.** $270=2\times 3^3\times 5$; $378=2\times 3^3\times 7$.
2. Le plus grand diviseur commun de 270 et 378 est $2\times 3^3=54$.
3. On peut faire 54 lots identiques composés chacun de 7 billets et 5 calots.

41 **1.** $2\,700=2^2\times 3^3\times 5^2=(3^2\times 5)\times(2^2\times 3\times 5)$
$4\,050=2\times 3^4\times 5^2=(3^2\times 5)\times(2\times 3^2\times 5)$
$5\,400=2^3\times 3^3\times 5^2=(2^2\times 3\times 5)\times(2\times 3^2\times 5)$
2. Les dimensions de la caisse sont :
$3^2\times 5=45$ cm, $2^2\times 3\times 5=60$ cm et $2\times 3^2\times 5=90$ cm.
Le volume est donc 243 000 cm^3.

42 On cherche les diviseurs de 60 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60.
On a toutes les possibilités de nombres d'amis.

43 $2\,400=2^5\times 3\times 5^2$
Comme les deux pages se suivent, les nombres peuvent être 452 – 453 ou 542 – 543.

44 **1.** 4 114 et 7 650 ne sont pas premiers entre eux, car ils sont tous les deux divisibles par 2.
2. $4\,114=2\times 11^5\times 17$ et $7\,650=2\times 3^2\times 5^2\times 17$
3. $\frac{4\,114}{7\,605}=\frac{121}{225}$

Je travaille seul(e)

45 B **46** C **47** A **48** C **49** A

50

	divisible par 2	divisible par 3	divisible par 5	divisible par 9	divisible par 10
15		Oui	Oui		
27		Oui		Oui	
42	Oui	Oui			
120	Oui	Oui	Oui		Oui
541					
11 541		Oui			
5 310	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
235 910	Oui		Oui		Oui

51 Par exemple 102.

52 $312=18\times 17+6$

53 C'est la division de 3 456 par 312.

54 **a.** Les diviseurs de 42 sont : 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.
b. Les diviseurs de 49 sont : 1, 7, 49.
c. Les diviseurs de 56 sont : 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56.
d. Les diviseurs de 64 sont : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

55 **a.** Trois multiples de 11 : 11, 22, 110.
b. Trois multiples de 17 : 17, 34, 170.
c. Trois multiples de 23 : 23, 46, 230.
d. Trois multiples de 39 : 39, 78, 390.

56 Les diviseurs communs à 66 et 44 sont : 1, 2, 11 et 22.

57 Les diviseurs communs à 52 et 78 sont : 1, 2, 13 et 26.

58 37 est un nombre premier.

59 69 n'est pas un nombre premier

60 83 et 89 sont les nombres premiers compris entre 80 et 90.

61 84, 168 et 840 sont des multiples communs à 12 et 21.

62 48, 96 et 480 sont des multiples communs à 16 et 24.

63 **1.** Il faut 7 étagères.
2. Il y a 5 volumes sur la dernière étagère.

64 **a.** $\frac{17}{8}$ est irréductible. **b.** $\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$

c. $\frac{43}{33}$ est irréductible. **d.** $\frac{540}{360}=\frac{3}{2}$

65 **a.** $\frac{513}{1311}=\frac{9}{23}$ **b.** $\frac{1232}{784}=\frac{11}{7}$

c. $\frac{1755}{2\,925}=\frac{3}{5}$ **d.** $\frac{1513}{2\,403}=\frac{17}{27}$

66 **1.** Le plus grand diviseur commun de 128 et 224 est 32.

2. $\frac{128}{224}=\frac{4}{7}$

67 **a.** $\frac{456}{741}=\frac{8}{13}$ **b.** $\frac{741}{456}=\frac{13}{8}$ **c.** $\frac{4\,560}{7\,410}=\frac{8}{13}$

68 **a.** $81 = 3^4$ **b.** $250 = 2 \times 53$

c. $16\,170 = 2 \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 11$

69 **1.** 396 et 378 ne sont pas premiers entre eux car ils sont tous les deux divisibles par 2.

2. $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$ et $378 = 2 \times 3^3 \times 7$

3. $\frac{396}{378}=\frac{22}{21}$

70 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$; $144 = 2^4 \times 3^2$

Donc le plus grand diviseur commun de 120 et 144 est $2^3 \times 3 = 24$.

On peut faire 24 coffrets contenant chacun 5 flacons et 6 savonnettes.

71 **1.** $60 = 2^2 \times 3 \times 5$; $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

2. a. Les diviseurs communs à 60 et 84 sont : 1, 2, 3, 4, 6, et 12.

b. Donc le plus grand diviseur commun de 60 et 84 est $2^2 \times 3 = 12$

3. a. PGCD (25 ; 35) = 5

b. PGCD (36 ; 48) = 12

c. PGCD (75 ; 125) = 25

72 **1. a.** 36 est un multiple commun à 2 et 6 car $36 = 2 \times 18$ et $36 = 6 \times 6$.

b. 77 est un multiple commun à 7 et 11.

c. 330 est un multiple commun à 3, 5 et 11 car $330 = 11 \times 3 \times 5 \times 2$.

d. 105 est un multiple commun à 3, 5 et 7.

2. a. PPCM (2 ; 9) = 18

b. PPCM (5 ; 10) = 10

c. PPCM (15 ; 21) = 105

d. PPCM (2 ; 5 ; 7) = 70

e. PPCM (2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) = 60

■ Je résous des problèmes

73 Le nombre est 330.

74 **1.** Elle a raison car $2^n \times 3^n \times 7^n + 2^n \times 21^n \times 5 + 6^n \times 7^n \times 4$
$= 2^n \times 3^n \times 7^n + 2^n \times 3^n \times 7^n \times 5 + 2^n \times 3^n \times 7^n \times 4$
$= 2^n \times 3^n \times 7^n \times (1 + 5 + 4) = 10 \times 2^n \times 3^n \times 7^n$ donc est divisible par 10.

2. Il a raison. Soit n et $n+1$ deux entiers consécutifs. Si d est un diviseur commun à n et à $n+1$, alors d est diviseur de leur différence donc d divise 1 donc $d = 1$. Donc le seul diviseur commun à n et $n+1$ est 1.

75 **1.** et **2.** 45 ans = $45 \times 365 = 16\,425$ jours et $16\,425 : 225 = 73$ années vénusiennes.

Donc dans 45 ans, les planètes se retrouvent dans la même position car Vénus aurait fait 73 tours du Soleil.

76 **1.** Le petit engrenage fait 6 tours.

2. La grande aiguille bouge de 30 dents, soit un tiers de tour vers la gauche, et pointera vers le 8.

77 **1.** Il y a 119 soldats.

2. $119 = 7 \times 17$ donc on peut faire des lignes de 7 ou de 17 soldats.

78 **1.** On cherche le plus grand diviseur commun à 518, 448 et 350, c'est 14. Donc il y a 14 m entre chaque arbre.

$518 + 448 + 350 = 1\,316$. Donc le périmètre du terrain est de 1 316 m.

$1\,316 : 14 = 94$ donc il faut au minimum 94 arbres.

2. $94 \times 54 = 5\,076$ donc le cout de cet investissement sera de 5 076 €.

79 **1.** $abcd = a \times 1\,000 + b \times 100 + c \times 10 + d$.

2. Donc $abcd = 999 \times a + 99 \times b + 9 \times c + a + b + c + d$
$= 9(111 \times a + 11 \times b + c) + a + b + c + d$.

Donc $abcd = 9(111 \times a + 11 \times b + c) + a + b + c + d$.

3. Or $9(111 \times a + 11 \times b + c)$ est divisible par 3 car 9 est divisible par 3.

4. Donc $abcd$ est divisible par 3 si $a + b + c + d$ est divisible par 3.

5. et **6.** La même démonstration fonctionne pour des entiers avec plus (ou moins) de chiffres.

Elle marche aussi pour étudier le caractère de divisibilité par 9 d'un entier.

80 **1.** (41 ; 43)

2. 429 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 3.

81 **1.** et **2.** $26 = 13 + 13 = 23 + 3 + 19 + 7$

$48 = 19 + 29 = 17 + 31 = 11 + 37 = 41 + 7 = 43 + 5$

$98 = 61 + 37 = 67 + 31 = 79 + 19$

82 **1.** $M_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ et $M_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ sont des nombres premiers.

2. $M_5 = 31$ et $M_7 = 127$.

3. $M_{11} = 2\,047 = 23 \times 89$

83 **1.** $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$

$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$

2. $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537$

3. $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$

Dans les autres matières

84 **1.** 7 280 : 65 = 112 et 1 040 : 65 = 16.
2. 112 × 16 = 1 792 dalles

85 **1.** PGCD (220 ; 176) = 44 donc la longueur du côté d'un carré sera de 44 cm, c'est-à-dire 0,44 m.
2. 220 : 44 = 5 et 176 : 44 = 4 donc l'ouvrier peut faire 20 carrés (4 × 5 = 20) dans une seule plaque.
3. 0,44 × 0,44 × 0,005 = 0,000968 donc le volume de chaque plaque « carrée » sera de 0,000968 m^3.
0,000968 × 2 700 kg = 2,6136 donc la masse d'un carré obtenu sera d'environ 2, 6 kg.

86 135 livres chacun. Il a 16 petits-enfants.

Jeux mathématiques

87 16 hommes + 19 femmes = 35 personnes.

88 5 étages maximum. Il faut 57 cartes pour 6 étages.

89 6 semaines.

90 100 000 000 000 095 est le plus petit nombre de 15 chiffres (qui ne commence pas par 0), divisible par 15 et dont la somme des chiffres est 15.

91 Il y a deux solutions : 374 et 396.

Devoirs à la maison

92 **1.** 28 est parfait car 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.
2. 64 est presque parfait : 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.
3. Les nombres presque parfaits inférieurs à 20 sont 2, 4, 8 et 16.

93 220 et 284 sont amicaux car :
$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 + 220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 + 284 = 504.$$

94 **1.** 10 080 est gentil car il est divisible par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.
2. Le plus petit nombre gentil est 2 520 car
5 × 7 × 8 × 9 = 2 520.

95 **1.** Un nombre décimal peut s'écrire comme une fraction de deux entiers avec un dénominateur égal à 10 ou 100 ou 1 000 ou… donc Jean a raison
2. $100x = 21{,}2121212121\ldots$ donc $100x = 21 + x$
3. $99x = 21$ donc $x = \dfrac{21}{99} = \dfrac{7}{33}$

Avec un logiciel

Activité 1. Multiples de 6 et nombres premiers

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité courte et simple permet de découvrir d'une façon originale les nombres premiers inférieurs à 100. Plusieurs compétences « tableur » attendues au collège sont développées dans cette activité (saisir une formule, la recopier…).

Cette activité est assez facile et ne nécessite pas une connaissance approfondie du tableur. Sa mise en œuvre est possible pour des élèves débutants dans l'usage du tableur grâce à l'utilisation des fiches méthodes qui permettent un travail autonome de l'élève (fiches tableur 1 et 2).

Activité 2. Recherche de diviseurs et test de primalité sur tableur

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet aux élèves de programmer de façon assez fine une feuille de calcul pour déterminer le nombre de diviseurs d'un entier et donc savoir si cet entier est premier ou non.

Les compétences « tableur » développées dans cette activité sont nombreuses (créer une liste de nombres, saisir une formule avec une référence absolue, la recopier, utiliser une fonction).

Les dernières questions offrent des prolongements vers l'utilisation de fonctions originales (ex. : fonction CONCATENER pour écrire une phrase avec une valeur de cellule) et l'utilisation de la fonction **nb.si** pour comptabiliser le nombre de 0 dans une liste est une fonction qui sera aussi utilisée dans certains exercices de simulation d'expériences aléatoires.

Activité 3. Recherche de diviseurs et test de primalité sur Scratch

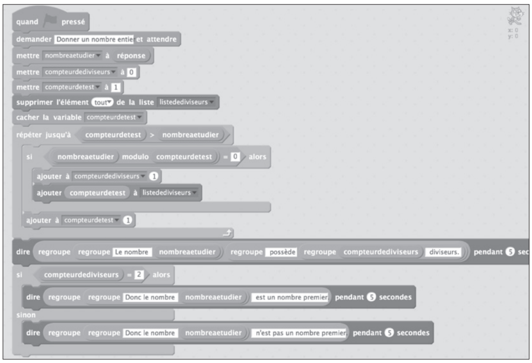
• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet aux élèves de programmer sur Scratch un algorithme permettant de déterminer le nombre de diviseurs d'un entier et donc savoir si cet entier est premier ou non. Il est intéressant de la mettre en parallèle de l'activité précédente.

Les compétences algorithmiques développées dans cette activité sont nombreuses (utilisation de variables, de boucles, de listes).

Le logiciel Scratch est tout à fait adapté pour mettre en œuvre ce type d'algorithme de calcul et cette programmation pourra être utile pour tester la primalité ou chercher les diviseurs de grands nombres.

Un algorithme possible ici est :



Tâches complexes

1. Les engrenages de Mathilda

Roue bleue : 9 dents

Roue verte : 13 dents

Roue jaune : 15 dents

Roue violette : 31 dents

Il faut avancer d'un nombre de dents égal au plus petit multiple commun de 9, 13, 15 et 31.

C'est $9 \times 13 \times 5 \times 31 = 18\,135$ dents ce qui correspond à $18\,135 : 9 = 2\,015$ tours de la roue bleue.

2. Le nouveau jeu de Julien

16 n'est pas un diviseur de 92, donc il n'avait pas le droit de jouer le 16 après le 92.

chapitre 2

Calcul littéral

I. Le programme

Thème A – Nombres et calculs

Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maîtrise des procédures de calcul. Les différentes composantes de ce thème sont reliées entre elles. Les élèves manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils prennent conscience du fait qu'un même nombre peut avoir plusieurs écritures (notamment écritures fractionnaire et décimale). Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour résoudre des problèmes faisant intervenir des équations ou inéquations du premier degré. À l'occasion d'activités de recherche, ils peuvent rencontrer la notion de nombres irrationnels, par exemple lors d'un travail sur les racines carrées.

Attendu de fin de cycle

- Utiliser le calcul littéral.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser le calcul littéral	
■ Mettre un problème en équation en vue de sa résolution. ■ Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples. ■ Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré. – Notions de variable, d'inconnue. ■ Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.	■ Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines). ■ Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d'équation. ■ Étudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par exemple, en factorisant des équations produits simples à l'aide d'identités remarquables). ■ Montrer des résultats généraux, par exemple que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3.

II. Contexte du chapitre

En 5^e et en 4^e, les élèves ont appris à produire, utiliser, transformer des expressions littérales. En 3^e, il s'agira de poursuivre le travail amorcé en début de cycle, d'étendre la connaissance de la distributivité (double distributivité) et d'utiliser le calcul algébrique pour démontrer des résultats généraux. L'algèbre sera aussi mobilisé pour décrire des propriétés des nombres entiers (multiples, précédent, suivant, pair, impair...).

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Résoudre un problème à l'aide du calcul littéral ■ Vidéo « *Je comprends* » : Développer en utilisant la double distributivité ■ Vidéo « *Je comprends* » : Démontrer une propriété à l'aide du calcul littéral
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Tableur ■ Activité 3 : Tableur ■ Activité 4 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Arnaud est un boss en calcul mental ?!

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Produire et utiliser une expression littérale

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'objectif de cette activité est d'apprendre à utiliser une formule. Cet objectif n'est pas nouveau pour la classe de 3e mais la différence se situe au niveau de la complexité de la formule à utiliser (trois variables, présence de parenthèses et d'exposant).

• *Correction*

1. Résultats en m^3

	Dimension n° 1	Dimension n° 2	Dimension n° 3
Formule de l'an II	0,315	0,891	0,548
Formule de Dez	0,309	0,878	0,546
Formule de Kepler	0,319	0,897	0,548

2. En utilisant les résultats obtenus par la formule de Kepler, on peut obtenir par exemple :
50 tonneaux de dimension 2 et 1 tonneau de dimension 1 ;
10 tonneaux de dimension 1 ; 10 tonneaux de dimension 2 et 60 tonneaux de dimension 3 ;
20 tonneaux de dimension 1 ; 20 tonneaux de dimension 2 et 38 tonneaux de dimension 3.

3. Par exemple : $h = 1{,}39$ m ; $D = 1{,}03$ m ; $d = 0{,}81$ m.

$$\frac{\pi \times 1{,}39}{36} \times (2 \times 1{,}03 + 0{,}81)^2 \approx 1 \text{ m}^3$$

Activité 2. Connaitre et utiliser la double distributivité

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'objectif de cette activité est de formaliser la double distributivité. Celle-ci est utilisée en acte depuis l'école primaire (dans le registre numérique) pour effectuer des multiplications posées.

Il s'agit donc de prendre appui sur ces connaissances ainsi que sur la distributivité simple pour formaliser la double distributivité.

• *Correction*

1.

×	50	6
90	4 500	540
3	150	18

$$4\,500 + 540 + 150 + 18 = 5\,208$$

2. a.

×	*a*	*b*
c	*ac*	*cb*
d	*ad*	*bd*

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

b. $(a + b)(c + d) = a \times (c + d) + b \times (c + d)$

$a \times (c + d) + b \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$

3. a. $(2x + 3)(5 + 4x) = 8x^2 + 15 + 22x$

b. $(7x - 1)(3x + 6) = 21x^2 - 6 + 39x$

c. $(4x - 2)(5 - 2x) = 24x - 10 - 8x^2$

d. $(-3 + x)(-x - 9) = 27 - x^2 - 6x$

Activité 3. Découvrir les identités remarquables

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'étude des identités remarquables répond à un double objectif.

D'une part, utiliser le calcul algébrique pour démontrer un résultat général. Le lien avec la rationalité mathématique sera travaillé à cette occasion (un contre-exemple suffit pour prouver qu'une affirmation est fausse ; de nombreux exemples ne prouvent pas une généralité).

D'autre part, connaitre et utiliser les identités remarquables permettra d'étudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par factorisation pour se ramener à une équation produit nul par exemple).

Enfin, la formulation des questions 1 et 2 permettra de réactiver le vocabulaire somme, produit...

Ceci permettra d'étudier l'aspect structural de l'expression littérale en vu notamment de différencier les formes développées et factorisées.

• *Correction*

1. Faux : contre-exemple 10 et 5.

$(10+5)^2 = 225$ et $10^2 + 5^2 = 100 + 25 = 125$

2. a. Avec 10 et 5

$2\times 10\times 5 + 10^2 + 5^2 = 225 = (10+5)^2$

b. $2ab + a^2 + b^2 = (a+b)^2$. En effet :

$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3. $(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

4. a. $5^2 - 2^2 = (5+2)\times(5-2) = 21$

b. $7^2 - 3^2 = (7+3)\times(7-3) = 40$

c. $9^2 - 8^2 = (9+8)\times(9-8) = 17$

5. b. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Car $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

6. a. $(6+3x)^2 = 36 + 36x + 9x^2$

b. $(6-3x)^2 = 36 - 36x + 9x^2$

c. $(6+3x)(6-3x) = 36 - 9x^2$

Activité 4. Utiliser le calcul littéral pour démontrer une propriété

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'objectif de cette activité est d'utiliser le calcul algébrique pour prouver des résultats généraux.

Il est souhaitable de couper cette activité en deux parties.

Temps 1 : Proposer aux élèves les questions 2 et 3 à traiter sous forme de défi dans la classe.

Temps 2 : Si les élèves n'ont pas émis de conjectures permettant de trouver certaines familles de nombres (impairs, multiples de 4...), leur proposer celles des questions 4 et 5.

• *Correction*

1. $4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

2. Voici le début de la liste. L'objectif est de laisser un temps suffisant pour que les élèves commencent à émettre des conjectures.

$0 = 1^2 - 1^2$	$1 = 1^2 - 0^2$	2	$3 = 2^2 - 1^2$	$4 = 2^2 - 0^2$
$5 = 3^2 - 2^2$	6	$7 = 4^2 - 3^2$	$8 = 3^2 - 1^2$	$9 = 5^2 - 4^2$
10	$11 = 6^2 - 5^2$	$12 = 4^2 - 2^2$	$13 = 7^2 - 6^2$	14

3. $a^2 - b^2 = 105$

Donc on cherche $(a+b)(a-b) = 105$

On trouve $a = 13$ et $b = 8$.

$a = 11$ et $b = 4$

$a = 19$ et $b = 16$

4. Vrai. $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$

5. Vrai. $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$ c'est un multiple de 4.

■ Objectif 1. Produire et utiliser une expression littérale

Je m'entraine

1 **a.** $n+1$ **b.** $n-1$ **c.** $2n$ **d.** $\frac{n}{2}$

2 **a.** -1 **b.** 20 **c.** 23,36

3 **2.** Aire des deux figures dessinées : 5 cm² ; 8,5 cm²

Périmètre : 9 cm ; 12 cm

3. Aire : $c^2 + (c+1)^2$

4. Périmètre : $3\times c + 3\times(c+1)$

4 **1.** $a = \text{A2}+1$

$b = \text{A2} - 1$

2. a. $M+1$

b. $M-1$

5 **1.** $2n$ est un nombre de la table de 2, c'est donc un nombre pair.

2. $5n$

6 **1.** $2n+1$ **2.** $2n+3$ **3.** $2n-1$

Je résous des problèmes simples

7 $(a+b)(c+d)$; $ac+bc+ad+bd$; $a(c+d)+b(c+d)$; $c(a+b)+d(a+b)$;

$a(c+d)+bc+bd$; $ac+b(c+d)+ad$;

$ac+b(c+d)+(a+b)\times d - bd$

8 **1. a.** 16 **b.** 25 **c.** 49 **d.** 100

2. a. 200^2 **b.** 40^2

3. $(n-2)+(n-1)\times n+2$

9 **1. a.** et **b.** $((3+7)\times 3)^2 = 900$

2. $((N+7)\times 3)^2$

3. 17

10 **1.** 7

2. 25

3. $2n+1$

4. 2 001

11 175 621 649 400 km³

12 **1.** 8 **2.** 10,25

3. $\frac{a+b}{2}$ **4.** $\frac{137}{30}$

■ Objectif 2. Connaitre et utiliser la double distributivité et les identités remarquables

Je m'entraine

13 **a.** 400 **b.** $(30-4)(30+4)=30^2-4^2=884$
c. 800 **d.** 9 996 **e.** 95
f. 891 **g.** 12 **h.** 8,96

14 **1.**

$\times$	$9x$	-3
$5x$	$45x^2$	$-15x$
$+4$	$36x$	-12

2. $45x^2+21x-12$

15 **a.** $2x^2+3x-5$
b. $-10x^2+38x-36$
c. $-x^2+2x-1$
d. $6x^2+21x+18$

16 **a.** $-6x^2-10x+4$
b. $-108x^2$
c. $9x^2+54x+81$
d. $28x^2-74x+58$

17 **1.** $1\ 600-80+1=1\ 52$
2. a. 9 801 **b.** 841 **c.** 38 025

18 **1.** 1 764
2. a. 10 609 **b.** 961 **c.** 576

19 **a.** $(x+4)^2=x^2+8x+16$
b. $(10x-5)^2=100x^2-10x+25$
c. $(2x+3)^2=4x^2+12x+9$
d. $(x-4)(x+4)=x^2-16$
e. $(7x+1)(7x-1)=49x^2-1$

20 **a.** $x^2+8x+16$ **b.** $x^2-10x+25$
c. $1-9x^2$ **d.** $25-4x^2$

21 **a.** $x^2+12x+36$ **b.** x^2-6x+9
c. $16+64x+64x^2$ **d.** $36-24x+4x^2$
e. $25-81x^2$ **f.** $49-16x^2$

22 **a.** $(5-x)(5+x)$ **b.** $(x+1)^2$
c. $(7x+10)(7x-10)$ **d.** $(2x-3)^2$
e. $16(x+1)(x-1)$ **f.** $(8-3x)^2$

Je résous des problèmes simples

23 $3x^2-11x+10=(3x-5)(x-2)$
$3x^2-13x-10=(x-5)(3x+2)$
$3x^2+13x-10=(x+5)(3x-2)$
$3x^2+11x+10=(3x+5)(x+2)$

24 **1.** $-6-2=-8$
$-8\times(-6+3)=24$
$24+6=30$
$30-36=-6$
$\frac{4}{7}-2=\frac{-10}{7}$
$\frac{-10}{7}\times\left(\frac{4}{7}+3\right)=\frac{-250}{49}$
$\frac{-250}{49}+6=\frac{44}{49}$
$\frac{44}{49}-\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{28}{49}=\frac{4}{7}$

2. $(x-2)(x+3)+6-x^2=x$

25 **1.** $N-1$ le nombre précédent : $3\,000\,215-1=3\,000\,214$
$N+1$ le nombre suivant : $3\,000\,215+1=3\,000\,216$
$N-2$ pour $3\,000\,215-2=3\,000\,213$
2. Résultat 2
3. a. $A=N\times(N+1)-(N-1)(N+2)$
b. Oui

26 $3x+9$

27 Il y a de nombreuses solutions possibles. En restant avec des coefficients entiers, en voici quelques unes.

$\times$	$4x$	-8
$3x$	$12x^2$	$-24x$
5	$20x$	-40

$\times$	x	-2
$12x$	$12x^2$	$-24x$
20	$20x$	-40

$\times$	$-4x$	8
$-3x$	$12x^2$	$-24x$
-5	$20x$	-40

28 Les volumes sont égaux.
En nommant h_1 et h_2 les hauteurs des deux cônes tels que $h_1+h_2=h$:

$$\frac{\pi R^2 h_1}{3}+\frac{\pi R^2 h_2}{3}=\frac{\pi R^2(h_1+h_2)}{3}=\frac{\pi R^2 h}{3}$$

29 **1.** $\frac{1}{2}m(2v)^2=4\times\frac{1}{2}mv^2$. L'énergie est 4 fois plus grande.
2. $\frac{1}{2}m(v+20)^2=\frac{1}{2}m(v^2+40v+400)$
L'énergie augmente de $20vm+200m$.

30 Proposition 1 : Faux. Contre-exemple $a=3$ et $b=2$.
$(3-2)(3+2)(3+2)=25$ et $3^3-2^3=19$
Proposition 2 : Vrai. $4+(a+2)(a-2)=4+a^2-4=a^2$

■ Objectif 3. Prouver ou réfuter un résultat général

Je m'entraine

31 **a.** Faux, contre-exemple $x=2$.

b. Vrai
c. Vrai
d. Vrai

32 Vrai, $3a+3b=3\times(a+b)$
Non, contre-exemple : 3 + 3 = 6 et 6 n'est pas un multiple de 9.

33 $2a+2b=2\times(a+b)$
Toujours pair.

34 $(2a+1)+(2b+1)=2\times(a+b)+2=2\times(a+b+1)$
Toujours pair.

35 **a.** $(a+b)^2+(a-b)^2=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2$
$=2a^2+2b^2$

b. $(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$
$=4ab$

c. $(a+b)(a-b)+b^2=a^2-b^2+b^2=a^2$
$ab+a(a-b)=ab+a^2-ab=a^2$

36 Vrai. $10a+b+10b+a=11(a+b)$

37 **1.** $(10c)^2=100c^2$
2. $(c+10)^2=c^2+20c+100$.
L'aire augmentera de $20c+100$.

38 **a.** Faux. Contre-exemple $x=3$.
b. Vrai. $(x+3)^2+x^2=2x^2+6x+9$
c. Faux. Contre-exemple $x=7$.
d. Vrai. $2(x-2)^2+7=2(x^2-4x+4)+7=2x^2-8x+15$
e. Vrai. $(x+5)(x-3)=x^2+2x-15$ et
$(x+1)^2-16=x^2+2x-15$
ou bien
$(x+1)^2-16=(x+1+4)(x+1-4)=(x+5)(x-3)$

Je résous des problèmes simples

39 **1.** $\frac{1}{6}$ **2.** $\frac{1}{12}$ **3.** $\frac{1}{42}$ **4.** $\frac{1}{11\times10}$

5. $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$

40 **1.** $10+11+12$
2. Non, $11+12+13=36$ et $12+13+14=39$
3. Ce sont les multiples de 3 car $n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)$

41 **1.** Non, contre-exemple $1+2+3+4=10$.
2. Oui, $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5\times(n+2)$ est multiple de 5.

42 **1.** Oui
2. Oui, $(3x+6)^2+(4x+8)^2=(5x+10)^2$

43 **1. a.** 1 **b.** 1 **c.** 1 **d.** 1
3. $n^2-(n-1)\times(n+1)=1$

44 C'est sa mère qui a raison. En notant P le prix de départ : $P\times0{,}7\times0{,}8=0{,}56P$, soit une baisse de 44 %.

45 Non, car l'aire sera égale à $(15-x)\times(15+x)=15^2-x^2$ donc l'aire diminue de x^2.
Remarque : Les élèves peuvent aussi répondre à ce problème sans faire de calcul et en raisonnant par découpage de la figure.

46 Oui car $A=B=4x^2-12x-16$.

Je travaille seul(e)

47 A **48** A **49** C **50** B **51** B

52 **1.** $d=7\sqrt{t-12}$ donc $d=7\sqrt{16-22}=14\,\text{m}$.
2. $42=7\sqrt{t-12}$. On cherche t par tâtonnement, on trouve $t=48$ ans.

53 **1.** $K+6$ **2.** $K-6$

54 Si n pommiers sur une rangée, alors il y a 8 n conifères.

55

Factorisée	Développée
$(x-3)^2$	x^2-6x+9
$x(x+3)$	x^2+3x
$x(x-3)$	x^2-3x
$(x+2)(x+3)$	x^2+5x+6
$(x+3)(x-3)$	x^2-9
$(x+3)^2$	x^2+9+6x

56 **a.** $(3x+2)(4x+1)=12x^2+11x+2$
b. $(7+3x)(4x-5)=12x^2+13x-35$
c. $(x+6)(x+6)=x^2+12x+36$
d. $\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}+2x\right)=\frac{3}{20}x+\frac{6}{4}x^2+\frac{2}{15}+\frac{4}{3}x$
$=\frac{3}{2}x^2+\frac{89}{60}x+\frac{2}{15}$

57 **1.**

$\times$	$5x$	-1
$-2x$	$-10x^2$	$2x$
-3	$-15x$	3

2. $(5x-1)(-2x-3)=-10x^2-13x+3$

58 **a.** $(x-2)(3x+1)=3x^2-5x-2$
b. $(6-3x)(7x-5)=-21x^2+57x-30$
c. $(-x+3)(x-3)=-x^2+6x-9$
d. $(-2-3x)(-4-5x)=8+15x^2+22x$

59 **a.** $10-3x(4x+1)=10-12x^2-3x$
b. $(x+2)(x-2)-(x+3)=x^2-4-(x+3)$
$=x^2-4-x-3=x^2-x-7$
c. $(8-x)-(2x+4)=4-3x$
d. $(-5\times3x)(x\times4)=-60x^2$
e. $(2x+2)^2=4x^2+8x+4$
f. $(2x-3)(5x-6)+8=10x^2-27x+26$

60 **a.** $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
b. $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$
c. $(4+5x)^2 = 16 + 40x + 25x^2$
d. $(3-2x)^2 = 9 - 12x + 4x^2$
e. $(1+4x)(1-4x) = 1 - 16x^2$
f. $(8+3x)(-3x+8) = 64 - 9x^2$

61 **a.** $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$
b. $(x-9)^2 = x^2 - 18x + 81$
c. $(8+7x)^2 = 64 + 112x + 49x^2$
d. $(4-3x)^2 = 16 - 24x + 9x^2$
e. $(2+6x)(2-6x) = 4 - 36x^2$
f. $(5+4x)(-4x+5) = 25 - 16x^2$

62 **a.** $100 - x^2 = (10+x)(10-x)$
b. $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
c. $36x^2 - 25 = (6x+5)(6x-5)$
d. $9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$
e. $49x^2 - 49 = (7x+7)(7x-7)$
f. $100 - 40x + 4x^2 = (10-2x)^2$

63 $7N + 7M = 7(N+M)$

64 Non, car pour $x = 0$ on a $A = -24$ et $B = 24$.

65 $(2n)^2 = 4n^2$ qui est un multiple de 4.
Mais on a aussi $(2n)^2 = 2 \times n \times 2 \times n = 2 \times (2n^2)$.
Les deux affirmations sont vraies.

66 **1.** =A2^2
2. $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2 \times (2n^2 + 2n) + 1$ qui est toujours un nombre impair.

67 **1. a.** $7^2 - 5^2 = 24$
b. $55^2 - 53^2 = 216$
c. $19^2 - 17^2 = 72$
d. $11^2 - 9^2 = 40$
2. Vrai car $(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 8n$ qui est un multiple de 8.

68 Programme A $(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$
Programme B $2x + 1$
On obtient le même résultat.

69 $\dfrac{(x^2+3) \times 2 - 6}{2} = x^2$
Choisir un nombre entier positif
Mettre au carré

■ Je résous des problèmes

70 **1.** Nicolas a la bonne réponse, Michael a fait une erreur. Il a calculé $3x^2$ au lieu de $(3x)^2$.
2. La méthode de Michael est la plus rapide.

71 Soit $(10b + a)$ le nombre à deux chiffres choisi et N l'année de naissance.
$((10b + a) \times 25 + 426) \times 4 + 314 - N$
$= 1\,000b + 100a + 2018 - N$
$1\,000b + 100a$ représente le nombre choisi décalé vers les centaines et les milliers.
$2018 - N$ représente l'âge en 2018.

72 **1.** Soit a et b ces nombres :
$a + b = 250$; $(a+6)(b+6) = ab + 6(a+b) + 36$.
Donc $ab + 6 \times 250 + 36$, soit $ab + 1\,536$.
Leur produit augmentera donc de 1 536.
2. 369 ; d'après le raisonnement ci-dessus si on augmente chaque terme de la somme de n, le produit augmentera de $n \times (a+b) + n^2$.

73 Soit N le premier nombre choisi, on aura la sélection suivante.

N	$N+1$	$N+2$
$N+13$	$N+14$	$N+15$
$N+26$	$N+27$	$N+28$

On obtient la somme $9N + 126 - 126 = 9N$ qui est un multiple de 9.

74 **1.** $2 \times 2 = 2 + 2$
2. a. $\dfrac{11}{4} + \dfrac{11}{7} = \dfrac{77+44}{28} = \dfrac{121}{28}$ et $\dfrac{11}{4} \times \dfrac{11}{7} = \dfrac{121}{28}$
b. $\dfrac{12}{3} + \dfrac{12}{9} = \dfrac{108+36}{27} = \dfrac{48}{9}$ et $\dfrac{12}{3} \times \dfrac{12}{9} = \dfrac{16}{3}$ ou $\dfrac{48}{9}$
c. $\dfrac{7}{3} + \dfrac{7}{4} = \dfrac{28+21}{12} = \dfrac{49}{12}$ et $\dfrac{7}{3} \times \dfrac{7}{4} = \dfrac{49}{12}$
4. Soit $\dfrac{n}{x}$ et $\dfrac{n}{n-x}$ avec n et x différents de 0.
$\dfrac{n}{x} + \dfrac{n}{n-x} = \dfrac{n(n-x) + xn}{x(n-x)}$ et $\dfrac{n}{x} \times \dfrac{n}{n-x} = \dfrac{n^2}{x(n-x)}$

75 **1. a.** 10 **b.** 18 **c.** 22
3. Plusieurs conjectures possibles.
Par exemple, le résultat vaut la somme des 4 nombres ou encore, le résultat vaut le double de la somme des deux du milieu...
$(n+3)(n+2) - (n+1) \times n = 4n + 6$

76 On peut écrire ce nombre sous la forme
$1000a + 100b + 10b + a = 11 \times (91a + 10b)$
Vrai, ce nombre est un multiple de 11.

77 **2.** $42^2 + 42 = 43^2 - 43$
3. $n^2 + n = (n+1)^2 - (n+1)$

78 **1. a.** 225 **b.** 625 **c.** 1 225 **d.** 3 025
e. 4 225 **f.** 5 625 **g.** 7 225 **h.** 9 025
2. Vrai car :
$(10x+5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x \times (x+1) + 25$

79 **1.** Lou, $\sqrt{\dfrac{105 \times 17{,}5}{3\,600}} = 0{,}7144\ \text{m}^2$.
Donc $70 \times 0{,}7144 = 50\ \text{mg}$.
Joé, $\sqrt{\dfrac{150 \times 50}{3\,600}} = 1{,}44\ \text{m}^2$. Donc $70 \times 1{,}44 = 100\ \text{mg}$. Il ne faut pas dépasser 70 mg.
2. Agathe $\sqrt{\dfrac{90 \times 14}{3600}} = 0{,}59\ \text{m}^2$. Donc $70 \times 0{,}59 = 41\ \text{mg}$.

80 $9x^2 - 30x + 25 = (3x-5)^2$, le résultat sera toujours positif ou nul si $x = \frac{5}{3}$.

81 Soient h_1 la hauteur du cône et h_2 la hauteur du cylindre.

$V_{\text{cône}} = \frac{\pi R^2}{3} h_1$ et $V_{\text{cylindre}} = \pi R^2 h_2$; il faut donc que $\frac{\pi x^2}{3} h_1 = \pi x^2 h_2$ soit $h_1 = 3 \times h_2$.

La hauteur du cône doit être le triple de celle du cylindre.

82 **1.** $7-5$ et $9-5$; $2+4=6$ pour les dizaines soit 60.
$5-2$ et $5-4$ soit $3 \times 1 = 3$ pour les unités. Résultat 63.
$6-5$ et $7-5$; $1+2=3$ pour les dizaines, soit 30 ;
$5-1$ et $5-2$ soit $4 \times 3 = 12$ pour les unités. Résultat 42.
2. a. $(x-5)$ les doigts levés et $5-(x-5)$ les doigts baissés.
b. $(y-5)$ les doigts levés et $5-(y-5)$ les doigts baissés.
3. $(x-5)+(y-5)$ pour les dizaines et
$(5-(x-5))(5-(y-5))$ pour les unités.
$10 \times (x+y-10) + (10-x)(10-y)$
$= 10x + 10y - 100 + 100 - 10y - 10x + xy = xy$

Dans les autres matières

83 **1.** $S = 4 \times \pi \times 6\,371^2$ soit $510\,064\,472\ \text{km}^2$
2. $510\,064\,472 \times 0{,}7 = 357\,045\,130{,}4$
3. Environ 557 fois.

84 **1.** 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21
2. $1 + 2 + +3 + \ldots + (n-1) + n$

85 **1.** $H = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 1{,}2^2 \approx 7\ \text{m}$
2. Par tâtonnement : entre 1,5 s et 1,6 s.

Jeux mathématiques

86

$(x+3)^2$	x^2+6x+9
$(x+4)^2$	$x^2+8x+16$
$(x-3)^2$	x^2-6x+9
$(x-4)^2$	$x^2-8x+16$
$(2x+1)^2$	$4x^2+4x+1$
$(2x-1)^2$	$4x^2-4x+1$
$(2x+3)^2$	$4x^2+12x+9$
$(2x-3)^2$	$4x^2-12x+9$
$(x+3)(x-3)$	x^2-9
$(x+4)(x-4)$	x^2-16
$(2x+1)(2x-1)$	$4x^2-1$
Orphelin	$4x^2-8x+6$

87 Dans les cercles 1, 2 et 4.

88 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ donc $a+b=59$.
$a = 42$ et $b = 17$

Devoirs à la maison

89 **1. a.** $(120+3)^2 - (120+2)^2 - (120+1)^2 + 120^2 = 4$
Idem pour les autres calculs.
3., 4. et **5.** $(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4$

90 **1.** Relations vraies : $m = \frac{P}{g}$ et $g = \frac{P}{m}$.
2. a. 686 newtons.
b. 119 newtons.
3. $\frac{m \times 9{,}8}{m \times 1{,}7} \approx 5{,}76$

Avec un logiciel

Activité 1. Un cube

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Utiliser un tableur pour tester rapidement une conjecture.
Utiliser le calcul littéral pour prouver qu'une égalité est toujours vraie.
Exprimer de façon générale des propriétés des entiers (suivant, précédent...).

• *Correction*

	A	B	C	D
1	Nombre entier	Nombre précédent	Nombre suivant	Somme du produit des trois nombres et du 1er nombre
2	10	=A2-1	=A2+1	=A2*B2*C2+A2
3				

5. a. On pourra ajouter le calcul de A2^3 dans la cellule **E1**.
b. $x(x-1)(x+1) + x = x(x^2-1) + x = x^3 - x + x = x^3$

Activité 2. Nombres et chiffres

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Utiliser le tableur pour émettre et démontrer une conjecture.
Ce problème est aussi l'occasion de rencontrer différents types de démonstrations : calcul algébrique, disjonction de cas.

• *Correction*

B12

	A	B	C	D
1	Nombre de départ	Chiffre des dizaines	Chiffre des unités	Programme de calcul
2	10	=ENT(A2/10)	=A2-10*B2	=A2-(B2+C2)

3. b. Plusieurs conjectures possibles par exemple.
Le résultat est toujours 9 fois le chiffre des dizaines.
4. Plusieurs preuves possibles. En voici deux :
Preuve n° 1 : Un nombre de deux chiffres peut s'écrire $10a+b$ donc le programme de calcul donne $10a+b-a-b=9a$.
Preuve n° 2 : Raisonner par disjonction de cas et faire la liste des entiers à deux chiffres à l'aide du tableur.

Activité 3. Caravane de chameaux

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Utiliser un tableur pour faciliter une recherche par essai-erreur et élaborer une conjecture. Rencontrer des problèmes qui n'ont pas de solution. Le fait que les problèmes rencontrés en classe possèdent toujours une solution est un obstacle didactique que ce problème permettra de lever.
D'autre part, la modélisation de la situation à l'aide du tableur est pertinente car la longueur des calculs ne permet pas de les faire à la main.
Si on le souhaite, on peut prolonger ce travail avec un problème ayant une solution.
Par exemple : Combien doit-on emporter de sacs au minimum pour en avoir au moins 2 000 à l'arrivée ?

• ***Correction***

3.

	A	B
1	Nombre de sacs de sel	5500
2	Après 1 arrêt	=0,98*B1-6
3	2 arrêts	=0,98*B2-6
4	3 arrêts	=0,98*B3-6

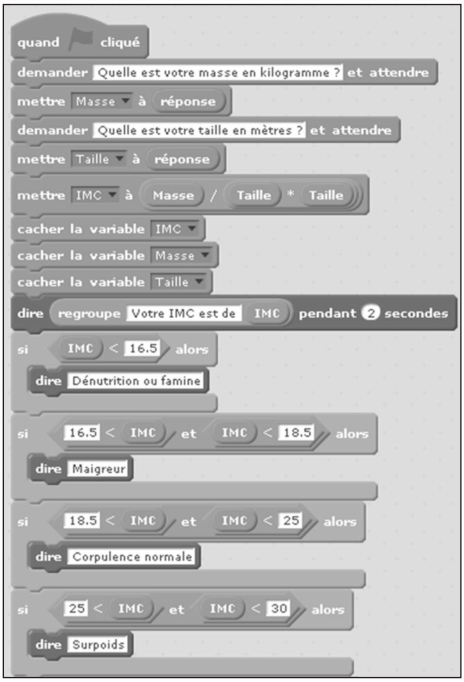
4. C'est une suite arithmético-géométrique :
$x_{n+1} = 0{,}98x_n - 6$.
Si on note N le nombre de sac emportés au départ, les touaregs arriveront avec $0{,}98^{42}(S+300)-300$ sacs.
Cette solution n'est pas accessible pour les élèves de 3e. L'enjeu est plutôt de faire la conjecture que le problème n'a pas de solution et que cela ne dépend pas du nombre de sac emportés au départ.

Activité 4. Masse et santé

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Il s'agit de programmer un algorithme permettant d'interpréter les résultats obtenus par le calcul de l'IMC. On pourra prolonger ce travail en demandant par exemple :
– de chercher des tailles et des masses permettant d'avoir un représentant de chaque catégorie ;
– de demander une validation par l'utilisateur de la taille ou du poids rentré si celui-ci semble incohérent (par exemple si l'utilisateur propose 185 comme taille, le chat peut demander vérification).

• ***Correction***



■ Tâches complexes

1. La déclaration d'impôts

Famille de Sarah

Revenu annuel de la famille de Sarah :
$(2\,630+4\,800)\times 12 = 89160$ €
Revenu net imposable : $0{,}9\times 89\,160 = 80\,244$
Nombre de parts : 4 parts (1 part par adulte, 2 demi-parts pour les deux premiers enfants, 1 part pour le 3e enfant).
Quotient : $\dfrac{80\,244}{4} = 20\,061$
Impôt à payer : $80\,244\times 0{,}14 - 1356{,}6\times 4 = 5\,807{,}76$ €

Famille de Julien

Revenu annuel de la famille de Julien :
$(2\,128+1730)\times 12 = 46\,296$ €
Revenu net imposable : $0{,}9\times 46\,296 = 41666{,}4$
Nombre de parts : 2,5 parts (1 part par adulte, 1 demi-part pour l'enfant)
Quotient : $\dfrac{41666{,}4}{2{,}5} = 16\,666{,}56$
Impôt à payer :
$41666{,}4\times 0{,}14 - 1356{,}6\times 2{,}5 = 2\,441{,}796$ €.

Affirmation :
On peut faire les calculs dans le cas d'une personne seule pour simplifier.
On peut regarder ce qui se passe aux changements de tranches en étudiant les cas limites.
Pour une personne seule qui déclare 26 764 €, elle devra payer 2 390,36 € d'impôts.
Si elle saute une tranche en gagnant 100 € de plus par exemple, elle déclarerait 26 864 et devrait payer 2 420,36 €.

2. Arnaud est un boss en calcul mental ?!

$$(x+1)^2 - x^2 = 2x+1$$

Pour effectuer mentalement le calcul proposé, il suffit donc de calculer mentalement le double du nombre proposé et d'ajouter 1.

chapitre 3

Équations et inéquations

I. Le programme

Thème A – Nombres et calculs

Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maîtrise des procédures de calcul. Les différentes composantes de ce thème sont reliées entre elles. Les élèves manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils prennent conscience du fait qu'un même nombre peut avoir plusieurs écritures (notamment écritures fractionnaire et décimale). Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour résoudre des problèmes faisant intervenir des équations ou inéquations du premier degré. À l'occasion d'activités de recherche, ils peuvent rencontrer la notion de nombres irrationnels, par exemple lors d'un travail sur les racines carrées.

Attendu de fin de cycle

- Utiliser le calcul littéral.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser le calcul littéral	
■ Mettre un problème en équation en vue de sa résolution. ■ Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples. ■ Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré. – Notions de variable, d'inconnue. ■ Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.	■ Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines). ■ Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d'équation. ■ Étudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par exemple, en factorisant des équations produits simples à l'aide d'identités remarquables). ■ Montrer des résultats généraux, par exemple que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3.

II. Contexte du livret

Depuis le début du cycle, les élèves ont appris à modéliser des situations à l'aide de l'algèbre. Ils ont aussi eu l'occasion de comprendre les différents statuts que peut avoir le signe =.
En 4^{e}, ils ont pu utiliser différentes techniques pour résoudre des problèmes comportant des nombres inconnus : tâtonnement (papier/crayon ou tableur) ; raisonnement arithmétique (inversion des opérations) ; utilisation d'un solveur... L'objet de ce chapitre est d'étudier une nouvelle procédure pour résoudre des équations du 1er degré : la procédure algébrique. Cette technique sera également étudiée dans le cadre de la résolution d'inéquations.
Enfin, l'objectif 2 de ce chapitre répond à l'attente du programme : résoudre des problèmes se ramenant au 1er degré. Sur cet objectif particulièrement, la maîtrise technique du calcul algébrique sera importante. Cet objectif, plus que tous les autres, sera donc l'occasion de différencier les attentes en fonction du niveau des élèves.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour le faire point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Résoudre une équation ■ Vidéo « *Je comprends* » : Résoudre une équation-produit ■ Vidéo « *Je comprends* » : Effectuer des opérations sur les inégalités ■ Vidéo « *Je comprends* » : Résoudre une inéquation
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Tableur ■ Activité 3 : Tableur ■ Activité 4 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU et le prix impossible

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Résoudre une équation

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Il est souhaitable de proposer cette activité en deux temps bien séparés.

Premier temps : Les trois défis de la question **1**.

Les défis ont été pensés pour mettre progressivement en défaut les procédures par tâtonnement et par inversion des opérations (soit impossible, soit trop long). Ces procédures déjà rencontrées en 4^{e} sont efficaces pour les deux premiers défis mais inefficaces pour le troisième. Il est possible et souhaitable que les élèves ne trouvent pas la réponse au troisième défi. Cela sera l'occasion de justifier l'introduction d'une nouvelle technique : la résolution algébrique des équations.

Second temps : Présenter la procédure d'Al-Khwarizmi (en vidéo-projection si possible).

La partie mise en équation peut être demandée aux élèves et la résolution peut être commentée en classe entière étape par étape à l'aide du logiciel Thot (gratuitement téléchargeable).

Remarque : Dans le cas où les élèves auraient trouvé la réponse au troisième défi, on pourra modifier la question b en demandant : «quel nombre doit-on choisir au départ pour que les programmes 2 et 3 donnent le même résultat final ?»

• *Correction*

1. a. $x = 5$.
b. $x = -3$.
c. $x = -12{,}6$.

2. a. Oui.
b. $(3x + 25) \times 2 = (x + 10) \times 11 + 3$;
$x = -12{,}6$.

Activité 2. Résoudre une équation-produit nul

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Cette activité répond à l'objectif : résoudre des problèmes se ramenant au 1er degré.

Les variables didactiques ont été pensées pour que l'une des solutions puisse être obtenue par tâtonnement et l'autre non.

On peut s'attendre à ce que les élèves mettent ce problème en équation et cherchent à le résoudre en développant l'expression obtenue. Ils obtiendront ainsi une équation du 2nd degré et n'auront pas les outils algébriques pour la résoudre. Cette impasse permettra au professeur de montrer l'intérêt de la forme factorisée et d'étudier les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un produit soit nul.

• *Correction*

1. $x = -3$ et $x = \frac{2}{3}$.
2. a. $((x + 3) \times 4) \times (3x - 2) = 0$.
b. Pour qu'un produit soit nul, il faut que l'un des facteurs soit nul.

Activité 3. Propriétés des inégalités

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'objectif de cette activité est d'identifier et de démontrer les propriétés des inégalités en vue de résoudre des inéquations.

La question 2 est difficile et vise à mobiliser l'équivalence si $a < b$, alors $a - b < 0$.

Le professeur pourra faire la démonstration que $a + c < b + c$ et demander aux élèves de faire la démonstration que $a - c < b - c$.

La question **3. a** pour objectif de travailler la rationalité mathématique (un contre-exemple suffit pour dire qu'une affirmation est fausse) et d'étudier le comportement des inégalités lorsque l'on multiplie les deux membres par un même nombre. Une fois l'affirmation invalidée, le professeur pourra demander comment la modifier pour qu'elle devienne vraie : quelle condition mettre sur *c* ? que se passe-t-il lorsque *c* est négatif ?

• ***Correction***

1.

a	b	Différence $a-b$	Comparaison de a et b
521	36	$521-36=485$	$a>b$
–75	–19	$-75-(-19)=-56$	$a<b$
52π	163	$52\pi-163\approx 0{,}36$	$a>b$
$\frac{27}{183}$	$\frac{19{,}6}{175}$	$\frac{27}{183}-\frac{19{,}6}{175}=\frac{271}{7625}$	$a>b$

2. Si $\leqslant b$, alors $a-b\leqslant 0$.
Donc $(a+c)-(b+c)\leqslant 0$ c'est-à-dire $a+c\leqslant b+c$.
Si $\leqslant b$, alors $a-b\leqslant 0$.
Donc $(a-c)-(b-c)\leqslant 0$, c'est-à-dire $a-c\leqslant b-c$.
3. Faux. Contre-exemple $a=6$; $b=7$; $c=-2$.

Activité 4. Résoudre une inéquation

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Comme pour la première activité, il serait souhaitable de couper cette activité en deux temps.
Premier temps : Recherche libre en posant directement la question **3**.
Les élèves pourront ainsi raisonner par tâtonnement (papier crayon ou tableur, résolution d'équation, éventuellement résolution graphique...).
Second temps : Résolution par inéquation en justifiant chaque étape de résolution à l'aide des propriétés identifiées lors de l'activité 3. Pour faire le bilan et répondre au problème posé, on pourra s'appuyer sur un axe gradué représentant le nombre de kilomètres parcourus.

• ***Correction***
1. Formule 2 si on fait beaucoup de kilomètres parce que le prix au km est moins cher.
Formule 1 si on fait peu de kilomètres.
2. a. x représente le nombre de kilomètres parcourus. Comparaison des formules 1 et 2 : plus précisément, pour quelles valeurs de x la formule 1 est-elle plus chère que la formule 2 ?
b. $375+0{,}75x>645+0{,}22x$
$x>510$ (arrondi à l'unité supérieure)
3. Comparaison F1 $<$ F3 : $x<419$
Comparaison F3 $<$ F2 : $x<900$
Donc si on fait moins de 419 km, c'est la formule 1 la moins chère.
Si on fait entre 419 et 900 km, c'est la formule 3.
Si on fait plus de 900 km, c'est la formule 2.

Objectif 1. Résoudre une équation

Je m'entraine

1 **a.** $x=4$ **b.** $x=6$ **c.** $2x=9$ **d.** $3x+7=5x-5$

2 **a.** $x=7$ **b.** $x=-5$ **c.** $x=12$ **d.** $x=-7$

3 **a.** $y=7$ **b.** $y=8$ **c.** $y=-12$ **d.** $y=9$

4 **1.** $3x=9$ **2.** $x=3$ car $\frac{3x}{3}=\frac{9}{3}$.

5 **1.** $3x-3=6$.
2. $x=3$.

6 **a.** $x=-6$
b. $x=-3$
c. $x=-4$
d. $x=-2$

7 **a.** $x=-2$
b. $x=\frac{-2}{3}$
c. $x=-1$
d. $x=-2$

8 **a.** $a=\frac{15}{4}$
b. $a=\frac{1}{4}$
c. $a=\frac{-1}{2}$
d. $a=\frac{5}{2}$

9 **a.** $b=\frac{-5}{8}$
b. $b=\frac{7}{4}$
c. $b=\frac{6}{15}$
d. $b=\frac{4}{3}$

Je résous des sproblèmes simples

10 La 2e étape du calcul est fausse car Antoine n'a pas effectué la même opération de chaque côté de l'égalité.

11 Vrai, $8x+7=3x+22$; $8x-3x=22-7$; $5x=15$ donc $x=3$.
$9x-4=2x+17$; $9x-2x=17+4$; $7x=21$ donc $x=3$.

12 $2x+17=5x+2$ a pour solution $x=5$; les autres ont $x=4$ pour solution.

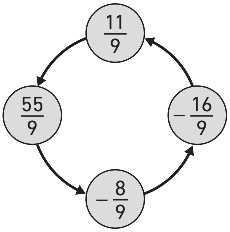
13 **1.** $3x+25=5x-11$.
2. $x=18$. Un DVD coûtera 18 €.

14 $16{,}1+2x=2{,}4+7x$ donc $x=2{,}74$.

15 **1.** et **2.** Si on nomme x le prix d'un jeu :
$5x+8x+203=580$ soit $x=29$.
Chaque jeu coûte 29 €.
3. Trois jeux.

16 **1.** $((2x+5)+x)\times 2$ soit $6x+10$.
2. $6x+10=31$; donc $x=3{,}5$.
Longueur $2x+5$; donc 12 m et largeur 3,5 m.

17



18 **1.** Soit x le prix d'une carte : $17x+0{,}15=18x-0{,}45$; donc $x=0{,}60$.
Prix d'une carte 0,60 €.
2. $17\times 0{,}60+0{,}15=10{,}35$ €

■ Objectif 2. Résoudre des problèmes se ramenant au 1^er^ degré

Je m'entraine

19 **a.** $(x+10)(x-10)$
b. $(5+2x)(5-2x)$
c. $(3x+7)(3x-7)$
d. $(8+x)(8-x)$

20 **a.** $2x+1=0$ et $4x-1=0$; donc $x=\frac{-1}{2}$ et $x=\frac{1}{4}$.
b. $2x-9=0$ et $-x-2=0$; $x=4{,}5$ et $x=-2$.
c. $3x-5=0$ et $8-2x=0$; donc $x=\frac{5}{3}$ et $x=4$.
d. $10x-4=0$; donc $x=\frac{2}{5}$.

21 **a.** $(x+3)+(x-4)=0$; $x=\frac{1}{2}$.
b. $x(2x-5)=0$; donc $x=0$ et $x=\frac{5}{2}$.
c. $(x+1)(x-5)=0$; donc $x=-1$ et $x=5$.
d. $4x^2-5=6x+4x^2$; donc $x=\frac{-5}{6}$.
e. $(x+1)(x+2)=2$; $x^2+3x=0$; $x(x+3)=0$; donc $x=0$ et $x=-3$.
f. $x=\frac{5}{3}$

22 **a.** $x=-17$
b. $x=\frac{13}{5}$
c. $x=-\frac{1}{4}$
d. Pas de solution

23 **1.** 5 sacs de pommes de terre et 6 kg pèsent autant que 7 sacs de pommes de terre moins 3 kg. Combien pèse un sac de pommes de terre ?
2. 4,5 kg

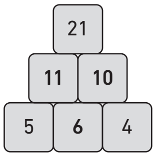
24 **a.** $(x+3)^2=0$ donc $x=-3$;
b. $(4x+1)^2=0$ donc $x=\frac{-1}{4}$;
c. $(x-1)^2=0$ donc $x=1$;
d. $(x+4)(x-4)=0$ donc $x=4$ et $x=-4$;
e. $(5x+3)(5x-3)=0$ donc $x=\frac{3}{5}$ et $x=\frac{-3}{5}$;
f. $(3x+10)(3x-10)=0$ donc $x=\frac{10}{3}$ et $x=\frac{-10}{3}$.

25 **a.** $(3x+1)-(4x-2)=0$ donc $x=3$.
b. $3x^2-4x=0$; $x=0$ et $x=\frac{4}{3}$.
c. $-x(12x+1)=0$ donc $x=0$ et $x=\frac{-1}{12}$.
d. $12+3x=16x-72$ donc $x=\frac{84}{13}$.

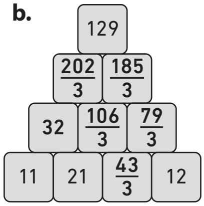
26 **1.** $x+1=11$.
2. $2x=5y-44$.
3. $x^2-1=0$.

Je résous des problèmes simples

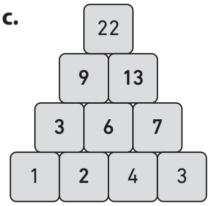
27 **a.**



b.



c.



28 $c^2=(c+27)(c-15)$; donc $c=33{,}75$.
Le carré avait 33,75 cm de côté.

29 $n(n+1)-216=(n-3)(n+1-3)$; $n=37$.
Les deux nombres sont donc 37 et 38.

30 Soit R le nombre de tarifs réduits vendus.
$8(87-R)+5R=639$; $R=19$.

31 Soit P le nombre de pirates.
$6P+5=7P-8$
$P=13$

32 **1.** $a+b+c=80$; $2a=80$; donc $a=40$.
2. $a+b=42$; $6b=42$; donc $b=7$ et $a=35$.
3. $b+8=a$; $5a=30$; donc $a=6$ et $b=-2$.

33 Si on note x le prix avant réduction, $x-0{,}3x=28$ donc $x=40$.
Le casque coutait 40 €.

34 Soit x la délégation allemande.
$2x+x+(x+3)=75$; donc $x=18$.
Délégation italienne : 36 ; allemande : 18 et française : 21.

■ Objectif 3. Propriétés des inégalités

Je m'entraine

35 **a.** Vrai.
b. Faux. Contre-exemple 8.
c. Vrai.
d. Faux. Contre-exemple $x = 10$.

36 **a.** –8 ; –9 ; –10 ; –11 ; –12.
b. 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.
c. 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17.
d. 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 8,5.
e. 3,11 ; 3,12…

37 **a.** $\frac{-38}{5} < -7{,}48$
b. $84{,}823 < 27\pi$
c. $\pi < \frac{104\,348}{33\,215}$
d. $\frac{13\,860}{33\,461} < \frac{33\,461}{80\,782}$

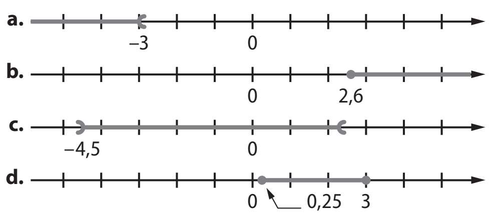
38 Les équations équivalentes sont :
- $n - 5 < 8$ $\quad n < 13$ $\quad n - 8 < 5$
- $n < 3$ $\quad n + 5 < 8$
- $n < -3$ $\quad n - 5 < -8$ $\quad n + 8 < 5$

39

$-5n < 20$	$n > 4$
$5n < 20$	$n < 4$
$5n < -20$	$n < -4$
$-5n < -20$	$n > 4$

40 **a.** $-1 < a + 3 \leqslant 8$
b. $-11 < a - 7 \leqslant -2$
c. $-24 < 6a \leqslant 30$
d. $-10 \leqslant< 2a < 8$

41



Je résous des problèmes simples

42

$M < 48$
$48 \leqslant M < 51$
$51 \leqslant M < 54$
$54 \leqslant M < 57$
$57 \leqslant M < 60$
$60 \leqslant M < 64$
$64 \leqslant M < 69$
$69 \leqslant M < 75$
$75 \leqslant M < 81$
$81 \leqslant M \leqslant 91$
$M > 91$

43 **a.** $19 \leqslant x < 52$
b. $-3 \leqslant x < 5$

44 **a.** Faux, les valeurs $19 \leqslant x < 21$ ne conviendront pas.
b. Faux, la valeur $x = 7$ ne convient pas.
c. Faux, $-2x + 3 < -19$ équivaut à $x > 11$

45

	L'égalité est toujours vraie	L'égalité est parfois vraie	L'égalité n'est jamais vraie
24 ⩽ ® 3		X	
12 ⩽ ® 1		X	
19 ⩽ 2®	X		
24 ® ⩽ ® 4		X	
98 ⩽ ® 2			X

46 **1.** F + P = J + I
J + P > I + F donc J > F   F + J > I + P donc J > P
Et par somme terme à terme des deux inégalités, J > I donc J est le plus lourd.
De même, F + P = I + J et F + J > I + P donne F > I (addition membre à membre).
F + P = J + I et J + P > I + F donne P > I (addition membre à membre).
Du coup, I est le plus léger.
2. On ne peut pas savoir. Voici un exemple qui le prouve :
Julie : 100 kg   Igor : 50 kg   Pierre : 70 kg   Florence : 80 kg
Julie : 100 kg   Igor : 50 kg   Pierre : 80 kg   Florence : 70 kg

47 $21 \times 30 \times 52 < Q < 26 \times 30 \times 52$; donc
$32\,760 < Q < 40\,560$
Il faudra donc entre 32,76 T et 40,56 T de nourriture.

48 $24 \times 0{,}97 + 0{,}15 <$ piscine $< 1{,}03 \times 24 + 0{,}15)$;
$23{,}43 <$ piscine $< 24{,}87$.
Le périmètre de la piscine mesure entre 23,43 m et 24,87 m.

■ Objectif 4. Résoudre une inéquation

Je m'entraine

49 **a.** $x < 5$ **b.** $x \leqslant -3$ **c.** $x \geqslant 5$ **d.** $5 \geqslant x > -3$

50 **a.** Vrai **b.** Non **c.** Non **d.** Oui

51 Plusieurs réponses possibles, par exemple :
a. 0 ; 1 ; 2 ; 3 ;4
b. 0; 1 ; –1 ; –2 ; –3
c. 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12
d. –1 ; –2 ; –3 ; –4 ; –5

52 **a.** $x > 4$ **b.** $-2 > x$ **c.** $2 > x$ **d.** $x > 3$
e. $x \geqslant 6$ **f.** $3 \leqslant x$ **g.** $-2 \geqslant x$ **h.** $-30 \leqslant x$

53 Plusieurs réponses possibles, par exemple :
1. $n+1 > 11$ $2n > 20$ $n-3 > 7$ $\frac{n}{2} > 5$ $-4n < -40$
2. a.

$2x < -10$	$x+5 < 0$	$x-4 < -9$	$-x > 5$	$x+1 < -4$

b.

$2y \geqslant y+9$	$2y-9 \geqslant y$	$y-8 \geqslant 1$

$3y-8 \geqslant 2y+1$	$2y-7 \geqslant y+2$

54 **1.** Choisir un nombre, le multiplier par 8, ajouter 6. Quel nombre peut-on choisir au départ pour obtenir un résultat strictement inférieur à 50 ?
2. $x < 5{,}5$

55 **a.** $5{,}8 < x$
b. $x \leqslant -3$
c. $x < 30$
d. $x > 5$
e. $x < 4$
f. $x > \frac{-63}{5}$

56 **a.** $x \geqslant -3$
b. $x > \frac{-5}{2}$
c. $x \geqslant 5$
d. $x < \frac{4}{13}$

57 **a.** $x \geqslant 6$
b. $x > \frac{-1}{2}$
c. $x \leqslant \frac{2}{3}$
d. $x < \frac{15}{7}$

58 **a.** $x < \frac{9}{4}$
b. Tous les nombres sont solutions.
c. $x \leqslant \frac{-11}{3}$
d. $x \geqslant \frac{11}{7}$

Je résous des problèmes simples

59 $4{,}85 + 2x < 30$ donc $x < 12{,}575$
L'autre côté ne doit pas dépasser 12,575 m.

60 Soit AE $= x$. $((24-x)+18)\times 2 > 2\times((x+18)\times 2)$; donc $x \leqslant 2$.

61 Soit x le nombre de séances. $262{,}80 + 30 < 11{,}50x$; donc $x > 25{,}46$.
À partir de la 26e séance, le « Pass » est plus avantageux.

62 Soit x le nombre choisi. $(x+6)\times 5 > x\times(-3)+68$; donc $x > 4{,}75$.

63 Soit a le côté du triangle. $4\times(20-a) \leqslant 3a$; donc $a \geqslant \frac{80}{7}$.

64 Soit x le nombre d'élèves. $18x + 350 \leqslant 980$ donc $x \leqslant 35$.
Au maximum, 35 élèves pourront y aller.

65 Soit N le nombre de pièces fabriquées.
$$360\,000 + 0{,}7N < 480\,000 + 0{,}5N$$
$$N < 600\,000$$

Je travaille seul(e)

66 B **67** C **68** C **69** A **70** B

71 **a.** –2 est la seule solution.
b. $x = -3$ et $x = 5$ sont les seules solutions.

72 **a.** $x = 14$
b. $x = \frac{17}{3}$
c. $x = \frac{1}{2}$
d. $x = 1$

73 **a.** $x = 9$
b. $x = -5$
c. $x = -0{,}5$

74 $7x - 0{,}07 = 5x + 20{,}05$.

75 **a.** $(5x-1)(2x-4) = 0$; il y a deux solutions : $5x-1=0$ et $2x-4=0$.
$5x = 1$ donc $x = \frac{1}{5}$ et $2x = 4$ donc $x = 2$.
b. $25x^2 - 9 = 0$ est équivalent à $(5x+3)(5x-3) = 0$; il y a deux solutions.
$5x+3 = 0$ et $5x-3 = 0$; $5x = -3$ donc $x = \frac{-3}{5}$ et $5x = 3$ donc $x = \frac{3}{5}$.
c. $4x^2 - 20x + 5 = 0$ est équivalent à $(2x-5)^2$; il y a une seule solution.
$2x - 5 = 0$ soit $2x = 5$ donc $x = \frac{5}{2}$.
d. $(x+2)(x-3) = x^2 + 6$; en développant
$x^2 - x - 6 = x^2 + 6$;
$-x = 6 + 6$ donc $x = -12$.

76 Soit x le nombre d'années.
$2\times(40\,000 + 6\,000x) = 130\,000 + 6\,000x$
$80\,000 + 12\,000x = 130\,000 + 6\,000x$
$12\,000x - 6\,000x = 130\,000 - 80\,000$
$6\,000x = 50\,000$, donc $x = \frac{25}{3} = 8 + \frac{1}{3}$.
C'est possible, il faudra attendre 8 ans et 4 mois.

77 **1.** $6x+6=15$; $6x=15-6$; $x=\frac{9}{6}$ donc $x=\frac{3}{2}$ ou 1,5 cm.
2. Aire de la croix $(3x\times3)-4\times(x\times1)$; $9x-4x$ soit $5x$.
$5x=8$; $x=\frac{8}{5}$ ou 1,6 cm.

78 1 L est équivalent à 1 dm^3 = 1 000 cm^3. Le volume de la brique est égal à $9{,}5\times6{,}5\times h$.
On peut écrire $9{,}5\times6{,}5\times h=1000$; $h=\frac{1000}{9{,}5\times6{,}5}$ donc $h=16{,}194$.
La brique devra faire 16,2 cm de haut.

79 **1.** Soit x le nombre d'années.
$42+x=(11+x)+(9+x)+(4+x)$
$42+x=24+3x$; $42-24=3x-x$; $2x=18$; $x=\frac{18}{2}$ donc $x=9$.
2. $38+x=(18+x)+(12+x)+(8+x)+(6+x)$
$38+x=44+4x$
$x=-2$.
C'était le cas il y a deux ans.

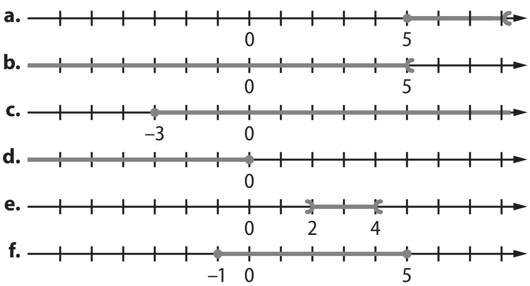
80 **a.** $8+10<x+10$ et $x+10\leqslant15+10$ donc $18<x+10\leqslant25$.
b. $8-10<x-10$ et $x-10\leqslant15-10$ donc $-2<x-10\leqslant5$.
c. $8\times10<10\times x$ et $x\times10\leqslant15\times10$ donc $80<10x\leqslant150$.
d. $8\times(-10)>x\times(-10)$ et $x\times(-10)\geqslant15\times(-10)$ donc $-150\leqslant-10x<-80$.

81 **a.** $-4+3\leqslant y+3$ et $y+3\leqslant6+3$ donc $-1\leqslant y+3\leqslant9$
b. $-4-3\leqslant y-3$ et $y-3\leqslant6-3$ donc $-7\leqslant y-3\leqslant3$
c. $-4\times3\leqslant y\times3$ et $y\times3\leqslant6\times3$ donc $-12\leqslant3y\leqslant18$
d. $-4\times(-3)\geqslant y\times(-3\geqslant6\times(-3)$ donc $-18\leqslant-3y\leqslant12$

82

	L'égalité est toujours vraie	L'égalité est parfois vraie	L'égalité n'est jamais vraie
8 < 5®	x		
24 ®< 17			x
24 ⩽ ®3		x	
12 ⩽ ®1		x	
20 ⩽ ®4		x	
98 ⩽ ®2			x
98 ⩽ ®8		x	

83



84 **a.** $3x+5\leqslant8$ $\quad 3x\leqslant8-5$ donc $x\leqslant1$
b. $15\leqslant7-2x$;
$8\leqslant-2x$
$-4\geqslant x$
c. $-3+5x<7x$
$-3<2x$
$-\frac{3}{2}<x$
d. $4x-8>10x+3$
$-6x>11$ donc $x<\frac{-11}{6}$
e. $-x-6>0$
$-6>x$
f. $4<-6x$
$-\frac{4}{6}>x$

85 **a.** $5x+3<16x-5$ donc $\frac{8}{11}<x$
b. $12x+6\leqslant24-x$ donc $13x\leqslant18$ et donc $x\leqslant\frac{18}{13}$
c. $13-5x>9-3x$ donc $-2x>-6$ donc $x<3$
d. $2x^2-18x+x-9\geqslant2x^2+6$ donc $-17x\geqslant15$ et $x\leqslant\frac{15}{17}$

86 Aire du rectangle : $(6-x)\times4$.
Aire du triangle : $\frac{4x}{2}$.
$\frac{4x}{2}\geqslant(6-x)\times4$
$4x\geqslant48-8x$
$12x\geqslant48$
$x\geqslant4$

87 $2{,}4\times5+4{,}2=16{,}2$ € par semaine.
Au bout de 18 semaines, on aura dépensé $18\times16{,}2=291{,}6$ €, et 4 jours après on aura dépensé en tout $291{,}6+2{,}4\times4=301{,}2$ €.
L'abonnement est donc intéressant à partir de 18 semaines complètes et 4 jours.

88 Soit x le nombre choisi. $(x+8)\times5-9\geqslant(3\times x+5)\times2$
$5x+40-9>6x+10$
$21\geqslant x$

■ Je résous des problèmes

89 33 cL = 330 cm^3. Soit h la hauteur.
$\pi\times3^2\times h=330$ donc $h\approx11{,}677$.
La canette devra mesurer 11,7 cm de hauteur.

90 De 0 à 90 km, c'est *Auto Discount*.
De 90 km à 175 km, c'est *Sécurit-auto*.
De 175 km à 250 km, c'est *Classe-auto*.
Au-dessus de 250 km, c'est *Auto Pas cher*.

91 Soit r le rayon de la piscine.
$\pi(r+1{,}5)^2-\pi r^2=120$ donc $x\approx11{,}98$.
Le rayon de la nouvelle piscine mesurera 12 m, donc le diamètre 24 m. Étienne a raison.

92 $2x>3x$ donc $0>x$. Vrai, c'est le cas des nombres négatifs.

93 **1.** $800\,\text{kg} < 1\,\text{m}^3$ de bois $< 1\,050\,\text{kg}$ donc
$2\,000\,\text{kg} < 2{,}5\,\text{m}^3$ de bois $< 2\,625\,\text{kg}$
et $2\,288\,\text{kg} < 2{,}86\,\text{m}^3$ de bois $< 3\,003\,\text{kg}$.
Il faut donc entre 2,5 m^3 et 2,86 m^3 de bois pour faire 1 T de papier, c'est-à-dire entre 0,28 ha et 0,32 ha.
2. La France consomme 10 900 000 T de papier chaque année, c'est-à-dire entre 3 052 000 ha et 3 488 000 ha.

94 Soit x le nombre de livres au-delà de 450.
$60 \times 450 + 5x < (450 + x) \times 28{,}50$ donc $x > 603{,}19$.
Il faudra vendre un minimum de 604 livres avant de faire un bénéfice.

95 **1.** Soit x le segment AF.
$5 \times x = (17 - x) \times 3$ donc $x = 6{,}375$, d'où AF $= 6{,}375$ cm.
2. $(5 + x) \times 2 = ((17 - x) + 3) \times 2$ donc $x = 7{,}5$.
AF $= 7{,}5$ cm.

96 Soit x le nombre de cartouches.
$16{,}5x + 4{,}9 < 17{,}9x$ donc $x > 3{,}5$.
Il faut donc acheter au moins 4 cartouches pour qu'acheter sur Internet soit plus avantageux qu'en magasin.

97 **1.** Jusqu'à 17 500 € de vente, la formule 1 500 € de fixe et 1 % des ventes est la plus intéressante. À partir de 17 500 €, c'est la formule à 10 % des ventes qui est la plus intéressante.
La formule à 800 € de fixe n'est jamais la plus intéressante.
2. Avec un fixe, on est assuré d'avoir un revenu convenable en fin de mois mais on ne pourra pas gagner beaucoup d'argent. Avec un pourcentage, c'est plus risqué mais on peut gagner beaucoup plus.

98 **1.** Les périmètres des deux figures sont toujours égaux.
2. Impossible.

99 Soit x le nombre de glaces vendues.
$2{,}80 \times x - \dfrac{75}{150} \times x > 2\,000$; $x \geqslant 870$.
Il devra donc vendre plus de 870 glaces.

100 **1.** 3 051,2 €.
2. 2354,52 €.
3. Soit x le nombre de kWh dépensés en heures creuses.
$$126{,}52 + 0{,}1114x + 0{,}16(20\,000 - x) < 3\,051{,}2$$
Ce qui donne $x > 5\,665\,\text{kWh}$.

101 Soit x le montant des ventes.
$0{,}15x > 700 + 0{,}08x$ donc $x > 10\,000$
À partir de 10 000 € de ventes, c'est Fatou qui sera la mieux payée.

102 Soit T le temps en minutes écoulées après 12 h 30.
Rémi aura parcouru : $110 \times \dfrac{6}{60} + T \times \dfrac{6}{60}$
Gauthier aura parcouru : $\dfrac{42}{60} \times T$
$11 + 0{,}1T = 0{,}7T$ donc $T = \dfrac{55}{3}$ min, c'est-à-dire 18 min 20 s, ce sera 12 h 48 min 20 s.

Dans les autres matières

103 **1.** Il y aura en tout $5 + 0{,}4 \times 1 = 5{,}4$ L d'orange dans le mélange. C'est-à-dire $\dfrac{5{,}4}{6} = 90\,\%$.
2. Soit x la quantité de Quita. On a $\dfrac{0{,}4 + x}{1 + x} = 0{,}8$ donc $x = 2$.
Il faut mettre 2 L de Quita.
3. $\dfrac{0{,}4 + x}{1 + x} = 0{,}72$ donc $x = \dfrac{8}{7}$.

104 **1.** Soit x ce nombre. $(x + 4) \times 3 < 5x - 2$ donc $x > 7$.
Il faudra donc choisir un nombre supérieur à 7.
2. $(x + 4) \times 3 = 5x - 2$ donc $x = 7$.
Il faut choisir 7.

105 **1.** Soit D le débit cardiaque au repos.
On a $\dfrac{34}{100}D + 3\,300 = D$, c'est-à-dire
$D = \dfrac{3300 \times 100}{66} = 5\,000 \dfrac{\text{mL}}{\text{min}}$; c'est-à-dire 5 L/min.
2. Soit E le débit cardiaque à l'effort $\dfrac{12{,}4}{100} \times E = 3100$ donc $E = 25\,000$ mL/min $= 25$ L/min.

Jeux mathématiques

106

$3x - 2 = x$	$7x - 4 = x + 8$	$3x - 2 = x + 4$
$3x - 2 = 2x + 2$	$3x - 2 = x + 8$	$7x - 2 = 2x + 3$
$x + 1 = \dfrac{x + 4}{2}$	$7x - 5 = 2x + 10$	$7x - 10 = 3x + 6$
$7x - 7 = 2x + 18$	$x + 1 = \dfrac{x + 3}{2}$	$\dfrac{5x + 1}{3x + 5} = 1$
$x + 1 = \dfrac{x + 9}{3}$	$x + 1 = \dfrac{4x - 1}{3}$	$x + 1 = \dfrac{x + 19}{4}$
$\dfrac{2x + 3}{x + 4} = 1$	$3x - 2 = x \times x$	$\dfrac{2x + 4}{3x + 1} = 1$
$x^2 + 6 = 5x + 2$	$\dfrac{5x + 1}{3x + 11} = 1$	$x^2 + 6 = 5x + 2$
$3x - 2 = x \times x$		

107 $((N - 6) \div 3 \times 4 - 14) : 2 \times 3 = N$ donc $N = 33$.
On aura la chaine : 33…27…9…36…22…11…et retour à 33

108 Soit x le nombre d'années. $50 + x = 78 + \dfrac{2}{12}x$ donc $x = 33{,}6$.

Si nous sommes en 2016, Hector aurait atteint l'espérance de vie dans le courant de 2050.

■ Devoirs à la maison

109 **1.** $50\,000 \times 5{,}1 \times 1{,}099 : 100 + 18\,000 = 20\,802{,}45$ pour le modèle diésel.

$50\,000 \times 6{,}7 \times 1{,}288 : 100 + 14\,500 = 18\,814{,}80$ pour le modèle essence.

C'est le modèle essence qui est le plus économique.

2. $250\,000 \times 5{,}1 \times 1{,}099 : 100 + 18\,000 = 32\,012{,}25$ pour le modèle diésel.

$250\,000 \times 6{,}7 \times 1{,}288 : 100 + 14\,500 = 36\,074$ pour le modèle essence.

C'est le modèle diésel qui est le plus économique.

3. Soit x le nombre de km.

$$x \times 5{,}1 \times 1{,}099 : 100 + 18000 < x \times 6{,}7 \times 1{,}288 : 100 + 14\,500$$

$$0{,}056049x + 18\,000 < 0{,}086296x + 14\,500$$

donc $x > 115713{,}95$.

Donc si on roule plus de 115 714 km, le diésel est plus avantageux.

110 $50 \times 1{,}030 = 51{,}50\,\text{kg}$. Oui, c'est légèrement plus léger.

Soit x la quantité d'eau.

$(50 - x) \times 1{,}030 + 1 \times x = 51{,}29$, donc $x = 7$.

Il y a donc 7 L d'eau dans le lait.

■ Avec un logiciel

Activité 1. Eurêka : la légende de la couronne

• Considérations didactiques et mise en pratique

Utiliser un tableur pour faciliter une recherche par tâtonnement en lien avec la notion de masse volumique et la proportionnalité.

Ce problème permet de faire le lien entre les mathématiques et la chimie. On pourra d'abord traiter l'exercice 103 p. 92 pour faciliter la compréhension du problème.

• Correction

3.

	A	B	C	D
1	Volume d'or	Volume d'argent	Volume total	Masse totale
2	38	=75-A2	=A2+B2	=19,3*A2+10,5*B2

4.

	A	B	C	D
1	Volume d'or	Volume d'argent	Volume total	Masse totale
2	46,875	28,125	75	1200

$46{,}875 \times 19{,}3 = 904{,}6875\,\text{g}$ au lieu des 1 200 g fournis au départ. Il a donc gardé 295,3125 g d'or.

Activité 2. Les danseurs

• Considérations didactiques et mise en pratique

L'objectif de ce problème est d'utiliser des listes pour étudier les différents cas possibles.

• Correction

1.

	A	B	C
1	Femme	Homme	Total
2	1	8	=A2+B2
3	2	9	=A3+B3
4	3	10	=A4+B4
5	4	11	=A5+B5

On trouve que la 28^e femme danse avec 35 hommes.

2. La 1re femme danse avec 8 hommes.

La 2^e danse avec 8 + 1 hommes...

La x-ième danse avec $8 + (x - 1)$ hommes.

On a donc $x + 8 + (x - 1) = 63$.

Il y a donc 28 femmes et 25 hommes à ce bal.

Activité 3. Programme de calcul

• Considérations didactiques et mise en pratique

L'objectif de ce problème est d'utiliser un tableur pour résoudre une équation du second degré par essais-erreur.

• Correction

1. $(1{,}5N + 4{,}5)^2 = (6{,}25N - 7{,}5) \times N + 2{,}25$

$2{,}25N^2 + 13{,}5N + 20{,}25 = 6{,}25N^2 - 7{,}5N + 2{,}25$

$0 = 4N^2 - 21N - 18$

On ne reconnaît pas directement une identité remarquable, c'est une équation du second degré que l'on ne peut pas ramener facilement à une équation de degré 1.

2.

	A	B	C
1	Nombre de départ	Programme N°1	Programme N°2
2	15	=(1,5*A2+4,5)^2	=(A2*6,25-7,5)*A2+2,25
3			

d. Les deux solutions sont –0,75 et 6.

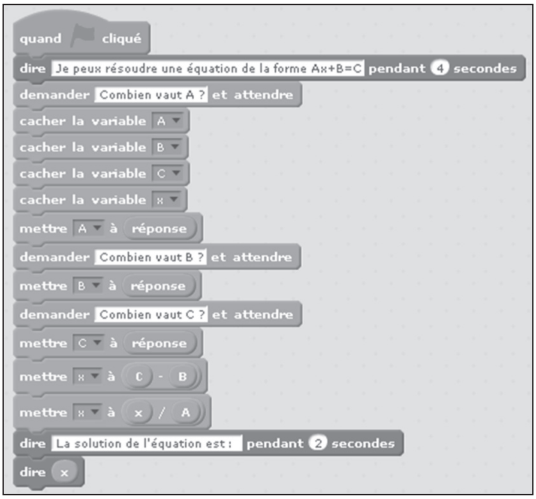
Activité 4. Des équations algorithmiques

• Considérations didactiques et mise en pratique

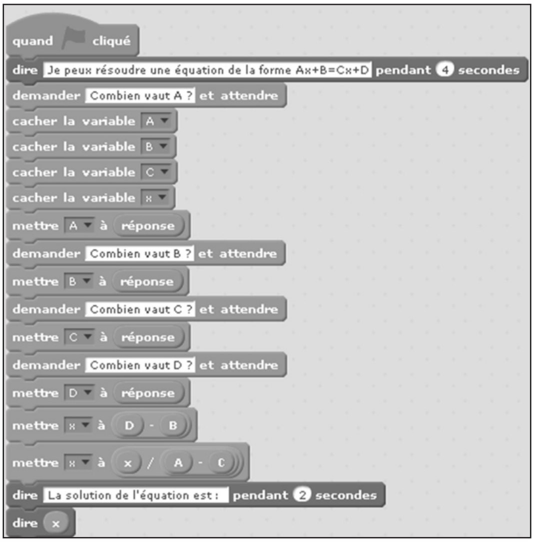
L'objectif de ce travail est de retravailler la technique de résolution des équations dans le cadre de l'algorithmique. L'objectif est d'automatiser la résolution des équations de la forme $Ax + B = C$.

• Correction

1. 2. 3. 4.



5.



■ Tâches complexes

1. Le food truck

Pour rembourser les frais de départ :
$25\,000+1000+2\,000+1600=29\,600$ €.

- Bénéfice par formule 1 : $12-3{,}70=8{,}3$ €
- Bénéfice par formule 2 : $10-2{,}90=7{,}1$ €
- Bénéfice par formule 3 : $8-2{,}50=5{,}5$ €
- Bénéfice par formule 4 : $5-2=3$ €

Bénéfice estimé pour x repas :
$0{,}5\times x\times 7{,}1+0{,}25\times x\times 8{,}3+0{,}125\times x\times 5{,}5+0{,}125\times x\times 3$
C'est-à-dire $6{,}6875x$.
Donc $6{,}6875x>29\,600$ équivaut à $x>4427$ repas.
Pour toucher un salaire de 16 000 € par an chacun (pour simplifier le problème on ne tient pas compte des cotisations et des taxes diverses) : $16\,000\times 2+10\,000=42\,000$ € par an.
Ce qui correspond à $\dfrac{42\,000}{6{,}6875}\approx 6\ 281$ repas vendus, chiffre qui correspond à environ 30 repas par jours en travaillant 4 jours par semaine.

2. Les DUDU et le prix impossible

3 cafés et 1 limonade coûtent 7,40 € donc 15 cafés et 5 limonades coûtent 37 €.
Comme 5 cafés et 5 limonades coûtent 19,45 €, 10 cafés coûtent 17,55 €, c'est-à-dire 1,755 € par café, ce qui est impossible...

chapitre 4

Notion de fonction

I. Le programme

Thème B – Organisation et gestion de données, fonctions

La plupart des notions travaillées dans ce thème ont déjà été abordées aux cycles précédents. Au cycle 4, les élèves apprennent à utiliser une représentation adaptée de données pour en faire une interprétation critique. Ils abordent les notions d'incertitude et de hasard, afin de construire une citoyenneté critique et rationnelle. Ils apprennent à choisir une méthode adaptée au problème de proportionnalité auquel ils sont confrontés. Ils découvrent progressivement la notion de fonction, qui leur permet d'accéder à de nouvelles catégories de problèmes.

Attendu de fin de cycle

- Comprendre et utiliser la notion de fonction.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Comprendre et utiliser la notion de fonction	
■ **Modéliser des phénomènes continus par une fonction.** ■ **Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations, inéquations).** – Dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre. – Notion de variable mathématique. – Notion de fonction, d'antécédent et d'image. – Notations $f(x)$ et $x \mapsto f(x)$. – Cas particulier d'une fonction linéaire, d'une fonction affine.	■ Utiliser différents modes de représentation et passer de l'un à l'autre, par exemple en utilisant un tableur ou un grapheur. ■ Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite. ■ Étudier et commenter des exemples (fonction reliant la tension et l'intensité dans un circuit électrique, fonction reliant puissance et énergie, courbes de croissance dans un carnet de santé, tests d'effort, consommation de carburant d'un véhicule en fonction de la vitesse, production de céréales en fonction des surfaces ensemencées, liens entre unités anglo-saxonnes et françaises, impôts et fonctions affines par morceaux...).

** En **gras** : ce qui est étudié dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

La plupart des notions travaillées dans ce thème ont déjà été abordées aux cycles précédents. Au cycle 4, les élèves apprennent à utiliser une représentation adaptée de données pour en faire une interprétation critique. Ils apprennent à choisir une méthode adaptée au problème de proportionnalité auquel ils sont confrontés. Ils découvrent progressivement la notion de fonction, qui leur permet d'accéder à de nouvelles catégories de problèmes.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour le faire point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Utiliser une fonction pour résoudre un problème ■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer l'image d'un nombre par une fonction ■ Vidéo « *Je comprends* » : Lire graphiquement une image et un antécédent
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Figure dynamique ■ Activité 3 : Figure dynamique ■ Activité 4 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU et l'abri à bûches

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Introduire la notion de fonction

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Dans les classes antérieures, les élèves ont travaillé la notion de fonction au travers de l'usage de la variable sur des exemples concrets mettant en œuvre du calcul algébrique. L'expression « en fonction de » est connue depuis la classe de Sixième.

Cette activité a pour objectif de réinvestir ces connaissances afin de les formaliser par l'expression algébrique d'une fonction.

Les notations nouvelles doivent être introduites prudemment et progressivement.

La fin de l'activité montre qu'une fonction peut être représentée graphiquement dans un repère. Il s'agit de faire comprendre aux élèves que les lectures graphiques qui en découlent facilitent grandement l'interprétation de certains éléments du problème posé.

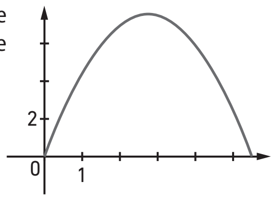
• ***Correction***

1. a. Dimensions : 1 m et 4,5 m ;
Aire : 4,5 m^2.

b. Dimensions : 2 m et 3,5 m ;
Aire : 7 m^2.

2. Dimensions : x et $5{,}5 - x$.

3. et 4. On observe que l'aire semble maximale pour une valeur de x proche de 2,2.



Activité 2. Déterminer l'image d'un nombre par une fonction

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

La notion d'image d'un nombre par une fonction est nouvelle, bien que connue des élèves de façon intuitive. Dans les classes antérieures, la substitution d'un nombre inconnu par une valeur numérique a déjà été pratiquée.

Cette activité réinvestit ce savoir-faire et le formalise.

Elle donne l'occasion d'introduire la notation nouvelle du type $2 \mapsto 1$.

La détermination d'images passe également par la lecture d'un tableau de données (question 5) ou la lecture d'un graphique (activité 3).

• ***Correction***

1. et 2. À vérifier sur le cahier de l'élève.

3. 12,5

4. 18 et 24,5.

5.

x	-10	-5	-2	0	2	5	10
$f(x)$	50	12,5	2	0	2	12,5	50

Activité 3. Déterminer un antécédent d'un nombre par une fonction

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

La lecture graphique facilite l'introduction de la notion d'antécédent d'un nombre par une fonction. Elle est intimement liée à la notion d'image. Le passage réciproque d'un axe à l'autre du repère en passant par la courbe doit faire preuve d'une attention particulière.

L'étude d'un exemple concret permet de débattre sur ces notions et en particulier l'opportunité qu'un nombre puisse posséder plusieurs antécédents, alors qu'un nombre ne possède qu'une seule image.

Dans l'exemple étudié, à 10 h, on ne peut faire correspondre qu'une unique valeur pour la hauteur de marée (image unique). Alors qu'une même hauteur de marée peut correspondre à plusieurs heures de la journée.

• ***Correction***

1. Bleu.
2. Vert.
3. 4.
4. 2.
5. – 1,5.
6. Non.

■ Objectif 1. Utiliser la notion de fonction

Je m'entraine

1 **a.** $A = 7x$.
b. $B = x^2 + 5$.
c. $C = \dfrac{x}{4+x}$.

2 $N = \dfrac{x^2}{2} + x$.

3 $N = 3x^2 + 5$.

4 $f(x) = x^2$.

5 $f(x) = \dfrac{25x}{3}$.

6 $f(x) = 2\pi x$.

Je résous des problèmes simples

7 **1.** 6 m ; 4 m.
2. 5 fois.
3. 4 m ; 2,5 m.
4. 1,1 s.

8 **1.** 9 minutes.
2. 14 jours.
3. Entre 11 et 16 jours.

9 **1.** 40 minutes.
2. 10 km.
3. Elle est au repos.
4. Entre 30 et 40 minutes.

10 $f(x) = 36\pi - \pi x^2$.

11 $x = 6$ par exemple.

■ Objectif 2. Déterminer l'image d'un nombre par une fonction

Je m'entraine

12 **a.** $x \mapsto 2x + 4$
b. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
c. $x \mapsto x - x^2$

13 4 et – 6.

14 9 et 49.

15 **1.** 6
2. – 1
3. 10
4. – 1 et 15.

16 – 2 et 0.

Je résous des problèmes simples

17 **1.** 6 et 0.
2. – 5 et 0.

18 **1.** 40 %.
2. 30 € et 36 €.

19 **2.** 250 km, 350 km et 575 km.

20 **a.** f
b. g
c. h

21 **1.** 2 100 € et 2 550 €.
2. 2 500 et 1 700.

22

L'image de 1 par la fonction f est 2.	$f(1) = 2$	$f : 1 \mapsto 2$
L'image de 3 par la fonction f est – 1.	$f(3) = -1$	$f : 3 \mapsto -1$
L'image de – 1 par la fonction f est 5.	$f(-1) = 5$	$f : -1 \mapsto 5$
L'image de 6 par la fonction f est – 6.	$f(6) = -6$	$f : 6 \mapsto -6$

23 **1.** Faux.
2. Faux.
3. Faux.
4. Faux.

24 **1.** 3.
2. – 1 et 2.
3. Oui.

■ Objectif 3. Déterminer un antécédent d'un nombre par une fonction

Je m'entraine

25 **a.** g **b.** f **c.** h **d.** h

26 **1.** 1
2. 3
3. 0,5

27 **1.** 1 **2.** 5

28 **1.** -2 **2.** 1 **3.** 1

29 **1.** 4 **2.** 6 **3.** 5

Je résous des problèmes simples

30 **1.** 250 €.
2. Pour avoir un bénéfice égal à 100 euros, il faut vendre 5 jouets ; pour un bénéfice de 300 euros, il faut vendre 30 jouets.

31 **1. a.** Faux **b.** Vrai
2. -1 et 1.

32 Distance d'arrêt = 14,14 m environ. Elle pourra s'arrêter.

33

2 est un antécédent de 3 par la fonction *f*.	3 est l'image de 2 par la fonction *f*.	$f(2) = 3$	$f: 2 \mapsto 3$
3 est un antécédent de 5 par la fonction *f*.	5 est l'image de 3 par la fonction *f*.	$f(3) = 5$	$f: 3 \mapsto 5$
-3 est un antécédent de 7 par la fonction *f*.	7 est l'image de -3 par la fonction *f*.	$f(-3) = 7$	$f: -3 \mapsto 7$
1 est un antécédent de -5 par la fonction *f*.	-5 est l'image de 1 par la fonction *f*.	$f(1) = -5$	$f: 1 \mapsto -5$

34 **1.** *f* **2.** *g* **3.** *f*

35 **a.** 3 **b.** 0 **c.** 7 **d.** 0,7 **e.** 2,1

Je travaille seul(e)

36 C **37** B **38** A **39** C **40** A

41 $5 + \frac{x}{3}$

42 $\frac{1}{x+1}$

43 **1.** $2x^2$
2. 72
3. $x = 3$

44 0,8 ; 1 ; 1,2 ; 1,4.

45 -8 ; -9 ; -8 ; 0.

46 -6 ; -4 ; 36 ; 126.

47 14 ; 0 ; -1 ; 1 997 000.

48 **1. a.** $f(2) = -1$
b. $f: 6 \mapsto 16$
c. $f(-2) = 5$
d. $f: 5 \mapsto 0$
2. 1 et 5 ; 3 et 4

49 **1.** 4
2. $-0,5$; 1 ; 3

50 **1.** 10^{10}
2. 10^{-8}
3. 10^{10}

51 **1.** 0
2. 10
3. -1
4. $-1,9$
5. -6

52 **a.** -1
b. 0
c. 2
d. 1,1

53 **a.** -2
b. -1 ; 3,8 et 5
c. $-0,5$; 1,6 et 6,2
d. 4,5

54 **1.** a et c
2. -2

Je résous des problèmes

55 **1.** $P(x) = 4x + 4$.
2. 20 et 26.
3. $A(x) = x(x + 2)$.
4. 48 et $\frac{91}{9}$.

56 **1.** 0,5 et 0.
2. $-0,8$; $-0,2$; 0,6.
3. Oui.
4. 0,5.

57 **1.**

x	$-1,2$	-1	$-0,8$	$-0,6$	$-0,4$	$-0,2$
$f(x)$	5,04	4	3,04	2,16	1,36	0,64

x	0	0,2	0,4	0,6
$f(x)$	0	$-0,56$	$-1,04$	$-1,44$

x	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$f(x)$	$-1,76$	-2	$-2,16$	$-2,24$	$-2,24$	$-2,16$	-2

2. À vérifier sur le cahier de l'élève.

58 **1.** 4,5 m et 5,8 m.
2. 0,8 s.
3. 5,8 m après 1 s.
4. 2,1 s.

59 **1.** Programme 1 : 14.
Programme 2 : 64.
2. Programme 1 : *g*.
Programme 2 : *f*.
3. Choisir un nombre ; ajouter 3 ; élever au carré.

60 **1.** ED $= \frac{3}{5}$AD
2. AD $= x$
3.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	0,6	1,2	1,8	2,4	3

4. 1,5

61 **1.** $-8{,}4$; $-1{,}6$; 7,2 ; 18.
2.

x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
$f(x)$	$-1{,}6$	$-0{,}81$	0	0,83	1,68	2,55	3,44

3. 3,2.
4. 1,5 ou 2.

62 **1.** 0.
2. $g(4) = -2$.
3. Non car $g(10) \neq -1$.
4. Pour $x = 5$, le dénominateur s'annule.

63 **1.** $V(x) = \frac{6\pi x^2}{3} = 2\pi x^2$.
2. Non.
$50\pi \approx 157{,}08$.
3. $200\pi \approx 628{,}32$.
$288\pi \approx 904{,}78$.
4. $x = 8$.

64 **1.** $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \frac{x}{2} + 1$
2. Non. $f(1) = 1$ et $g(1) = 1{,}5$.
3. Oui, les valeurs de x égales aux abscisses des points d'intersection des courbes.
4. $x \approx -0{,}8$ ou $x \approx 1{,}3$

65 Le rayon est environ égal à 2,8 cm.

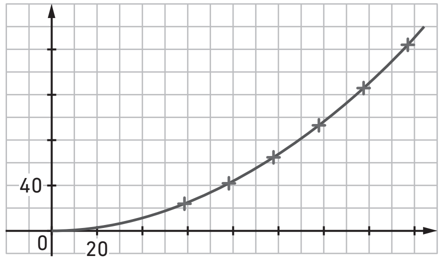
Dans les autres matières

66 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. Forte augmentation démographique à partir de 1900.
3. Entre 1200 et 1400.

67 **1.**

v	20	40	60	80	100	120	140	160
f(v)	2,5	10	23	41	64	93	126	165

2.



3. La distance de freinage d'un véhicule n'est pas proportionnelle à sa vitesse, puisque la représentation graphique n'est pas une droite.

Jeux mathématiques

68 Soit *n* l'entier choisi au départ.
On a alors à la fin : $3(n+1) - 3 - n = 2n$.

69 Solide 1 : Courbe 3.
Solide 2 : Courbe 1.
Solide 3 : Courbe 4.
Solide 4 : Courbe 2.

70 $\frac{1}{2}$

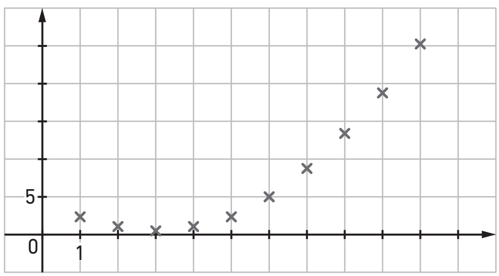
71 9

Devoirs à la maison

72

x	x^2	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^2}{2}+5$	$3x$	$f(x) = \frac{x^2}{2}+5-3x$
0	0	0	5	0	5
1	1	0,5	5,5	3	2,5
2	4	2	7	6	1
3	9	4,5	9,5	9	0,5
4	16	8	13	12	1
5	25	12,5	17,5	15	2,5
6	36	18	23	18	5
7	49	24,5	29,5	21	8,5
8	64	32	37	24	13
9	81	40,5	45,5	27	18,5
10	100	50	55	30	25

2. $f(2) = 1$
3.



73 **1.** $f(1)=-5$; $g(1)=1$; $h(1)=-0{,}5$.
2. $f(0) < h(0) < g(0)$
3. $g(2) > h(2) > f(2)$
4. $g(-1) > h(-1)$
5. a. $x=4$ et $x=4$.
b. Oui.
6. Pour $x=3$, le dénominateur s'annule.
7. x^2 est toujours positif.

Avec un logiciel

Activité 1. Programme de calcul et fonctions

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Le tableur est un outil à privilégier pour introduire la notion de variable. Les calculs peuvent être automatisés ; un changement de valeur dans une cellule entraîne le changement immédiat de l'affichage de toutes les cellules liées à celle-ci.
Dans les programmes de calculs, le nombre choisi au départ prend le rôle de la variable, le programme lui même correspond à l'expression d'une fonction qu'il faudra modéliser.
Cette activité donne également l'occasion de faire du calcul algébrique pour démontrer les résultats conjecturés.
Aucune difficulté technique n'est à attendre si les élèves ont quelques expériences du tableur. Ce type d'activité est un grand classique à résoudre à l'aide du tableur.

• ***Correction***
Programme A : $x(x+20)=x^2+20x$
Programme B : $(x+10)^2-100=x^2+20x$
Programme C : x^2+20x

Activité 2. La balle de tennis

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
L'utilisation d'un logiciel pour représenter et modéliser une situation concrète permet d'en faciliter l'interprétation.
Le logiciel permet d'afficher la courbe représentative de la fonction et d'y faire glisser un point dont les coordonnées sont affichées. Il s'agit ainsi d'interpréter les valeurs de ses coordonnées pour le problème posé. Par exemple, la lecture des coordonnées (1 ; 2) signifie qu'après 1 seconde, la balle se trouve à 2 m de hauteur.
Aucune difficulté technique n'est à attendre. Cette activité est l'occasion de montrer que de nombreux logiciels permettent de représenter les courbes représentatives de fonctions. C'est aussi l'occasion de débattre sur l'ensemble de définition d'une fonction qui peut dépasser les contraintes du problème.

• ***Correction***
3. a. 1,2 s **b.** 0,2 s et 1 s **c.** 0,6 s

Activité 3. Les cochons d'Inde de Thomas

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Cette activité permet de résoudre un problème d'optimisation en s'aidant d'un logiciel. Les objectifs didactiques sont identiques à ceux de l'activité 2.
Une difficulté supplémentaire est cependant à envisager : la modélisation du problème est ici demandée aux élèves. Aucune difficulté technique n'est à attendre. Voir commentaires de l'activité 2.

• ***Correction***
5. a. Graphiquement, on trouve 1,6 m. Cela correspond à une aire environ égale à 5,3 m^2.
La valeur exacte théorique est 1,625 m.

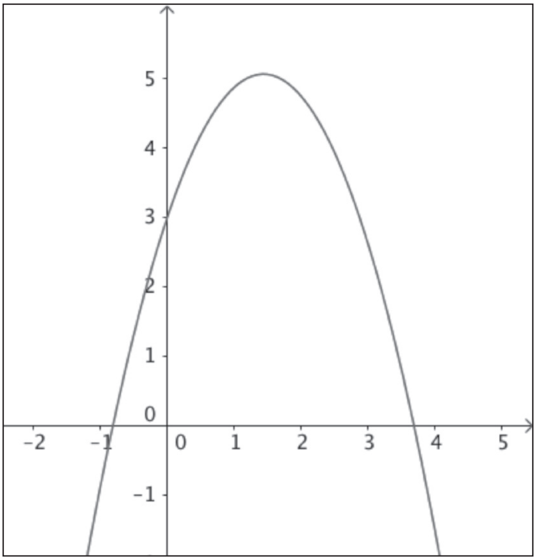
Activité 4. Magie-calcul

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Le programme demande de saisir un nombre et lui fait correspondre son image par une fonction déterminée par un programme de calcul.
L'élève doit déterminer l'expression de cette fonction pour comprendre le tour de magie qui mène à obtenir le double du nombre de départ.

• ***Correction***
La fonction est $f(x)=2(x+7)-14=2x$.

Tâches complexes

1. Un cône de lumière
L'expression générale d'une parabole est :
$$f(x)=ax^2+bx+c.$$
Les élèves pourront donner des résultats de la forme $f(x)=ax^2$.



2. Les DUDU et l'abri à bûches
Si on considère x comme la largeur, la longueur de l'abri sera de $\frac{(33-6-4x)}{2}$ c'est-à-dire $13{,}5-2x$.
On obtient la fonction $V(x)=40{,}5x-6x^2$.
V a un maximum par lecture graphique entre 3,5 m et 4 m.
La réponse plus précise étant de 3,38 m environ pour un volume proche de 68,34 m^3.

chapitre 5

Fonctions linéaires, fonctions affines

I. Le programme

Thème B – Organisation et gestion de données, fonctions

La plupart des notions travaillées dans ce thème ont déjà été abordées aux cycles précédents. Au cycle 4, les élèves apprennent à utiliser une représentation adaptée de données pour en faire une interprétation critique. Ils abordent les notions d'incertitude et de hasard, afin de construire une citoyenneté critique et rationnelle. Ils apprennent à choisir une méthode adaptée au problème de proportionnalité auquel ils sont confrontés. Ils découvrent progressivement la notion de fonction, qui leur permet d'accéder à de nouvelles catégories de problèmes.

Attendu de fin de cycle

- Comprendre et utiliser la notion de fonction.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
■ Modéliser des phénomènes continus par une fonction. ■ Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations, inéquations). ■ Dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre. – Notion de variable mathématique. – Notion de fonction, d'antécédent et d'image. – Notations $f(x)$ et $x \mapsto f(x)$. – Cas particulier d'une fonction linéaire, d'une fonction affine.	■ Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite. ■ Étudier et commenter des exemples (fonction reliant la tension et l'intensité dans un circuit électrique, fonction reliant puissance et énergie, courbes de croissance dans un carnet de santé, tests d'effort, consommation de carburant d'un véhicule en fonction de la vitesse, production de céréales en fonction des surfaces ensemencées, liens entre unités anglo-saxonnes et françaises, impôts et fonctions affines par morceaux…). ■ Faire le lien entre fonction linéaire et proportionnalité.

II. Contexte du chapitre

Au cycle 4, les élèves apprennent à utiliser une représentation adaptée de données pour en faire une interprétation critique. Ils apprennent à choisir une méthode adaptée au problème de proportionnalité auquel ils sont confrontés. Ils découvrent progressivement la notion de fonction, qui leur permet d'accéder à de nouvelles catégories de problèmes.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Déterminer graphiquement une fonction linéaire ■ Vidéo « *Je comprends* » : Représenter graphiquement une fonction affine ■ Vidéo « *Je comprends* » : Déterminer une fonction affine par deux nombres et leurs images
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Figure dynamique ■ Activité 2 : Figure dynamique ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU et la promo d'ABRICOT DEPOT

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Découvrir les fonctions linéaires

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'activité a pour objectif d'introduire les fonctions linéaires au travers de la notion de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité pourra permettre de justifier le formalisme d'une fonction linéaire. « Je multiplie par a » revient à associer une fonction du type $f(x) = a \times x$. L'image d'un nombre est obtenue en multipliant ce nombre par a.

Cette activité est également l'occasion de rappeler la notation du type $x \mapsto ax$ introduite dans le chapitre 7.

• *Correction*

1.

–2	0	2	4	$\times 3$
–6	0	6	12	

2. $f(x) = 3x$

3. Oui

4. Je multiplie x par 7.

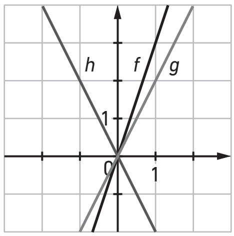
5. a. $m(x) = 2x$ **b.** $n(x) = -3x$ **c.** $p(x) = -5x$

Activité 2. Représenter graphiquement une fonction linéaire

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'activité rappelle qu'un nombre et son image par une fonction sont les coordonnées d'un point appartenant à la représentation graphique de la fonction. On devra insister sur la nature de la représentation graphique qui est une droite passant par l'origine pour une fonction linéaire.

• *Correction*



Activité 3. Découvrir les fonctions affines

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Dans le contexte d'une situation concrète, les fonctions affines sont introduites comme le processus multipliant par un nombre puis en ajoutant un second.

Il s'agit de distinguer les fonctions affines du cas particulier des fonctions linéaires en mettant en avant que les fonctions affines ne sont pas associées à une situation de proportionnalité.

• *Correction*

Nombre de spectacles auxquels Martin a assistés	5	8	10	15	20
Prix payé (en €)	22	28	32	42	52

f est une fonction affine donnée par l'expression :
$f(x) = 2x + 12$.

Activité 4. Déterminer une fonction affine

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

L'activité rappelle qu'un nombre et son image par une fonction sont les coordonnées d'un point appartenant à la représentation graphique de la fonction. On devra insister sur la nature de la représentation graphique qui est une droite pour une fonction affine.

Cette activité donne l'occasion d'introduire le vocabulaire nouveau (coefficient directeur et ordonnée à l'origine) ainsi que les notions qui s'en dégagent.

• ***Correction***

1. Tous les points de la droite (d_g) déplacée de trois unités dans le sens des ordonnées.

2. « Ordonnée à l'origine » : ordonnée de la droite du point d'abscisse 0.

3. $f(x+1) - f(x) = 2(x+1) + 3 - (2x+3) = 2$

■ Objectif 1. Utiliser et représenter une fonction linéaire

Je m'entraine

1 **a.** – 30 **b.** 5 **c.** 15 **d.** – 1,2 **e.** $\frac{15}{7}$

2 **a.** Je multiplie par 6.
b. Je multiplie par – 5.
c. Je multiplie par 3,5.
d. Je multiplie par $\frac{2}{3}$.

3 **a.** et **d.**

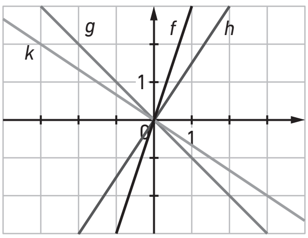
4 1 : droite passant par l'origine.

5 **1.**

x	4	7	9	11
$f(x)$	12	21	27	33

2. Il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

6



Je résous des problèmes simples

7 **1.** $f(x) = 4x$. Cette fonction est linéaire.
2. a. $g(x) = x^2$.
b. Cette fonction n'est pas linéaire.

8 **1.**

Nombre de places	4	12	24
Prix avec l'option 1	28	84	168

2. Il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

3. $f(x) = 7x$. Cette fonction est linéaire.

4.

Nombre de places	4	12	24
Prix avec l'option 2	41	73	121

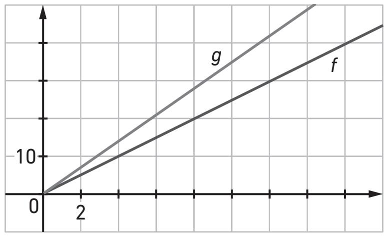
5. $f(x) = 4x + 25$. Cette fonction n'est pas linéaire.

9 (d_1) : h (d_2) : f (d_3) : g

10 **1.** Oui **2.** 3 **3.** $f(x) = -3x$

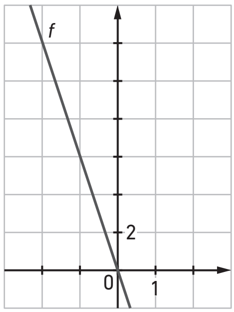
11 **1. a.** 2 **b.** 2 **2.** $g(x) = 0{,}5x$

12 **1.** Une droite.
2. a. 7,50 € ; 10 € ; 25 €.
b. (3 ; 7,5) ; (4 ; 10) et (10 ; 25).
3. et **4.**



13

x	–1	0	7	–9
$f(x)$	6	0	–42	54



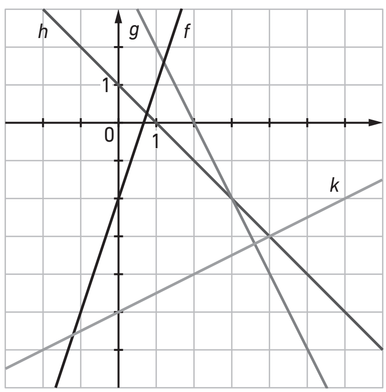
■ Objectif 2. Utiliser et représenter une fonction affine

Je m'entraine

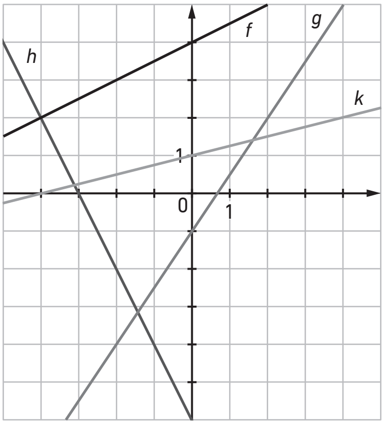
14 **a.** – 39 **b.** 9 **c.** 1 **d.** $\frac{-17}{3}$

15 a et d

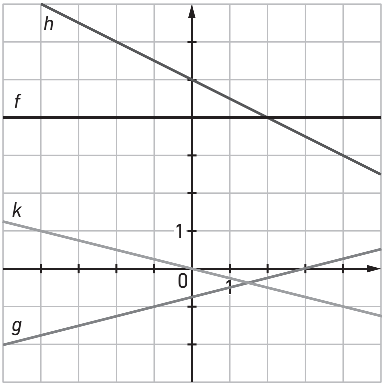
16



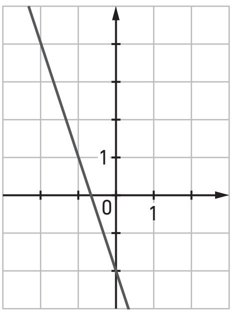
17



18



19



20 (d_1) : le coefficient directeur est -2 et l'ordonnée à l'origine est 1.

(d_2) : le coefficient directeur est 0,5 et l'ordonnée à l'origine est 0.

(d_3) : le coefficient directeur est 1 et l'ordonnée à l'origine est 3.

(d_4) : le coefficient directeur est $-2{,}5$ et l'ordonnée à l'origine est 5.

Je résous des problèmes simples

21 Fonctions affines : $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_4$

Fonction linéaire : $\mathscr{C}_2$

22 *f* : le coefficient directeur est 4 et l'ordonnée à l'origine est 5.

g : le coefficient directeur est -2 et l'ordonnée à l'origine est -5.

h : le coefficient directeur est 0 et l'ordonnée à l'origine est 6.

k : le coefficient directeur est -5 et l'ordonnée à l'origine est 7.

23 **1.**

Droite	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
(d_2)	-3	3
(d_1)	2	1
(d_4)	$-0{,}5$	4
(d_3)	0,5	-1

2. Pour (d_1) : $x \mapsto 2x+1$

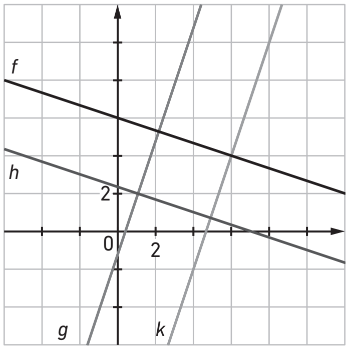
Pour (d_2) : $x \mapsto -3x+3$

Pour (d_3) : $x \mapsto 0{,}5x-1$

Pour (d_4) : $x \mapsto -0{,}5x+4$

24 Le point de coordonnées (2 ; 4).

25



Un parallélogramme.

26 **1.** $f(x) = 9 + x$: fonction affine.

2. $g(x) = 3x$: fonction linéaire.

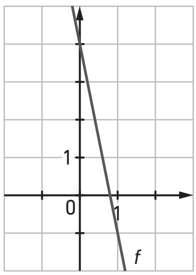
27 **1.** $f(x) = 2 + 0{,}05x$

2. Fonction affine.

3. $f(222) = 2 + 0{,}05 \times 222 = 13{,}1$

28 Images : 4 ; -1 et -6.

(0 ; 4), (1 ; -1) et (2 ; -6)



Objectif 3. Déterminer une fonction affine

Je m'entraine

29 **1.** $x \mapsto x$ **2.** $x \mapsto 3$ **3.** $x \mapsto -3$
4. $x \mapsto 8x$ **5.** $x \mapsto 3x$ **6.** $x \mapsto x+1$

30 **3.** $f(x) = 2x - 1$

31 **3.** $g(x) = -0{,}5x + 2{,}5$

32 $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

33 $g(x) = -3x + 11$

34 $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

35 $f(x) = x - 3$

36 $g(x) = -6$

37 B

Je résous des problèmes simples

38 $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

39 $f(x) = 0{,}4x - 0{,}2$

40 **2.** $f(x) = 0{,}4x$
3. $f(2) = 0{,}8$. Le point M appartient à la droite.

41 Julie confond la variable et le coefficient directeur.

42 **2.** $f(x) = 0{,}8x + 1$
3. $f(3) = 3{,}4$. Le point M n'appartient pas à la droite.

43 On définit une fonction f donnant le prix à payer en fonction de la distance telle que $f(x) = 2{,}2x + 15$.
On calcule $f(57) = 140{,}40$ €.

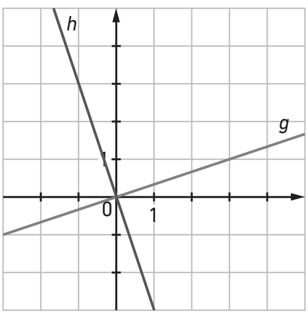
44 $g(x) = -16x + 42$

Je travaille seul(e)

45 B **46** B **47** A **48** C **49** A

50 **a.** -54 **b.** 9 **c.** 0 **d.** -12

51



52 **1.** Le point M semble appartenir à la droite.
2. $a = -0{,}2$
3. $f(x) = -0{,}2x$
4. $f(-2{,}5) = 0{,}5$

53 **1.** $f(x) = 12\,000x$
2. $f(1\,440) = 17\,280\,000$ km
3. $50\,000\,000 : 12\,000 \approx 4\,166$ min, soit un peu moins de 3 jours.

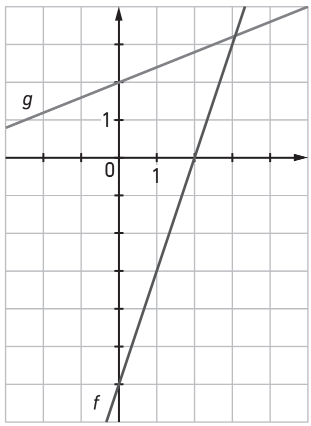
54 **1.** 5 min = 300 s.
$f(300) = 90$ pages. Deux classes représentent 54 copies. Elle aura donc le temps de les imprimer.
2. 5 min = 480 s.
$f(480) = 144$ pages.

55 **a.** 2 **b.** 10 **c.** 6,8 **d.** $-0{,}4$

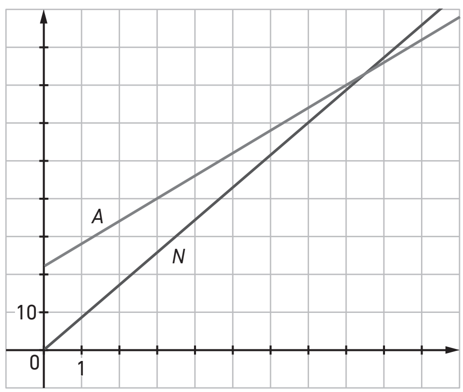
56 **a.** 1 **b.** -2 **c.** 3 **d.** $\frac{-17}{7}$

57 **1. a.** -1 **b.** -2 **c.** 1 **d.** $-0{,}5$
2. $g(x) = -0{,}5x + 1$.
3. $g(13) = -5{,}5$.

58



59 **1.** 34 €.
2. $8 \times 6 + 22 = 70$ €.
3. a. $N(x) = 8{,}5x$ **b.** $A(x) = 6x + 22$
4.



5. a. $x = 8{,}8$.
b. La carte devient intéressante à partir de 9 séances.

60 **1. a.** $a = 2$ **b.** $b = 1$
2. $f(x) = 2x + 1$.

61 **1.** $f(x) = -2{,}5x + 9$.
2. f est une fonction affine.

Je résous des problèmes

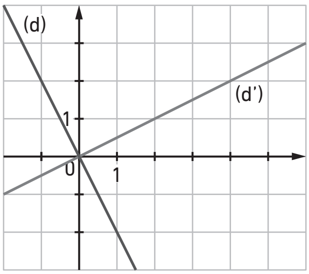
62 **a.** (f) **b.** (e) **c.** (c) **d.** (d) **e.** (f)

63 **1.** On multiplie le nombre de chanson par le prix unitaire et on rajoute l'abonnement.
2. $f(x) = 0{,}6x + 13$.
3. Abonnement 13 € et la chanson 0,60 €.
4. $f(267) = 173{,}20$ €.

64 **1.** Aire de la cuisine : $4 \times 8{,}4 = 33{,}6$ m^2.
Aire de la salle à manger : $(19 + 12) \times 8{,}4 : 2 - 33{,}6 = 96{,}6$ m^2.
Cette situation ne conviendrait pas à Norbert car les surfaces ne sont pas égales.
2. a. $f(x) = 8{,}4x$ et $g(x) = 130{,}2 - 8{,}4x$.
b. f et g sont des fonctions affines. f est linéaire.
3. À vérifier sur le cahier de l'élève.
4. AE $\approx$ 8 m.
5. AE $= 7{,}75$.

65 $m = -2$ et $n = -10$.

66 **1.** et **2.**



3. a. Le coefficient directeur de (d') semble être égal à 0,5.
b. $g(x) = 0{,}5x$.

67 **1.** (d'') **2.** (d'') **3.** (d'')

68 **1.** $f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2$
2. $f(x_1) - f(x_2) = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2)$
3. $a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$
4. La formule des accroissements.

69 L'usage d'un tableur permettra de trouver 274,4 km.

70 **1.** $f(x) = 12x$.
2. Environ 33 minutes.

71

x	$\frac{20}{11}$	-2	$-\frac{25}{11}$	11	15
$f(x)$	29	19	-16	-46	-66

72 **1.** f est croissante.
2. À vérifier sur le cahier de l'élève.
3. Une fonction est décroissante si, pour des valeurs de x choisies croissantes, leurs images ne restent pas dans le même ordre.
4. La fonction g est décroissante. Par exemple, $g(1) > g(2)$ alors que $1 < 2$.
5. À vérifier sur le cahier de l'élève.
6. Si le coefficient directeur d'une fonction affine est positif, alors la fonction est croissante.
Si le coefficient directeur d'une fonction affine est négatif, alors la fonction est décroissante.

Dans les autres matières

73 **1. a.** $f(x) = 145x$ **b.** $g(x) = 105x$
2. *Vision LCD* : 435 wattheures ;
Pulse LED : 315 wattheures.
3. 0,15 315 365 : 1 000 = 17 € environ.

74 **1.** 45 nœuds = 45 mille/h = $45 \times 1{,}852$ km/h = 83,34 km/h.
Son hors-bord n'est pas plus rapide qu'une voiture.
2. 70 km/h = 70 : 1,852 nœuds $\approx$ 38 nœuds. Elle a donc dû respecter le conseil de son ami.

75 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. $f(x) = 5x + 7$
3. 2,4

Jeux mathématiques

76 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. $f(x) = 4x$
3. f est sous la forme $f(x) = ax$.
4. a. 9
b. On multiplie par 4.

77 -491

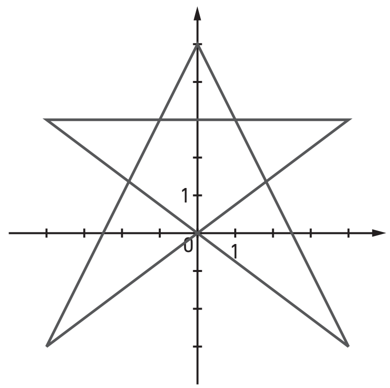
78 On se place dans un repère dans lequel les points E et F ont respectivement pour coordonnées (0 ; 13) et (21 ; 0). Dans ce repère, la droite (EF) représente la fonction $f(x) = -\dfrac{13}{21}x + 13$.
Il suffit alors de vérifier que le point C(8 ; 8) n'appartient pas à la droite (EF) :
$f(8) = \dfrac{169}{21} \neq 8$.

Devoirs à la maison

79 **1.** Pour 7 entrées : Miniplouf ; pour 15 entrées : Megaplouf.

2. a. $f(x) = 6x$ et $g(x) = 3{,}5\,x + 25$.
b. f et g sont des fonctions affines. f est linéaire.
3. À vérifier sur le cahier de l'élève.
4. Miniplouf pour moins de 10 entrées ; Megaplouf pour plus de 10 entrées.
5. $6x = 3{,}5x + 25$ donc $x = 10$.

80



Avec un logiciel

Activité 1. Fonction affine et droite représentative

• Considérations didactiques et mise en pratique

Le logiciel permet, à l'aide de curseur, d'observer de façon dynamique les représentations graphiques de fonctions affines. En faisant varier les curseurs associés aux éléments caractéristiques de la fonction (coefficient directeur et ordonnée à l'origine), l'élève pourra conjecturer des propriétés des droites représentatives et ainsi assimiler plus aisément la notion de pente.
Sans formalisme, l'élève pourra par exemple observer que deux droites parallèles possèdent des coefficients directeurs égaux et ainsi comprendre que le coefficient directeur détermine la pente de la droite.
En classe de Troisième, la réalisation de curseur n'est pas une difficulté. Cependant, pour des élèves ayant très peu d'expérience dans l'usage du logiciel GeoGebra, il peut être conseillé d'animer la séquence en classe entière au vidéoprojecteur et ainsi de débattre sur les propriétés des droites en relation avec ses éléments caractéristiques.

• Correction

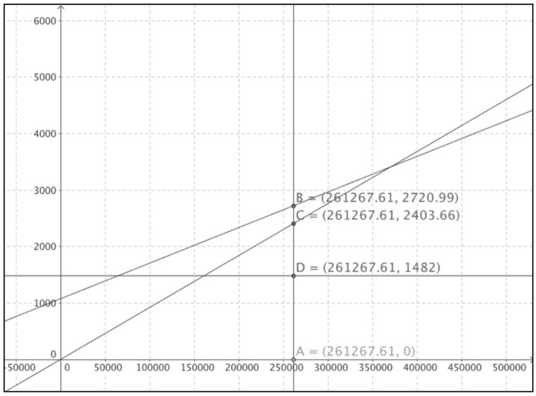
À vérifier dans le fichier de l'élève.

Activité 2. L'agence immobilière

• Considérations didactiques et mise en pratique

L'agence immobilière est une activité classique en classe de Troisième. Mais sa particularité est que les valeurs numériques choisies nécessitent l'usage d'un logiciel pour éviter que la résolution du problème ne mène à des calculs trop fastidieux.
L'élève affichera les droites représentatives des trois fonctions qu'il aura déterminées. En faisant glisser un point sur l'axe des abscisses, il pourra effectuer des lectures graphiques au moyen de coordonnées de points qu'il aura construits.
L'activité sera aussi l'occasion de réfléchir sur la meilleure fenêtre à choisir pour obtenir un affichage pertinent des droites.
L'activité ne présente aucune difficulté technique autre que le cadrage de la fenêtre graphique.

• Correction



Activité 3. D'un degré à l'autre...

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet de créer un programme qui automatise la conversion d'unités de mesure des températures (°C et °F).

• Correction

Pour créer le convertisseur inverse, il faut utiliser la fonction $g(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$.

Tâches complexes

1. Feux verts

Vitesse	Temps en seconde			Passage au feu en secondes				Temps	Feux
	800,0	800,0	900,0	Feu n°2	Feu n°3	Feu n°4		0,0	Vert
30,0	96,0	96,0	108,0	96,0	192,0	300,0		40,0	Rouge ou orange
31,0	92,9	92,9	104,5	92,9	185,8	290,3		60,0	Vert
32,0	90,0	90,0	101,3	90,0	180,0	281,3		100,0	Rouge ou orange
33,0	87,3	87,3	98,2	87,3	174,5	272,7		120,0	Vert
34,0	84,7	84,7	95,3	84,7	169,4	264,7		160,0	Rouge ou orange
35,0	82,3	82,3	92,6	82,3	164,6	257,1		180,0	Vert
36,0	80,0	80,0	90,0	80,0	160,0	250,0		220,0	Rouge ou orange
37,0	77,8	77,8	87,6	77,8	155,7	243,2		240,0	Vert
38,0	75,8	75,8	85,3	75,8	151,6	236,8		280,0	Rouge ou orange
39,0	73,8	73,8	83,1	73,8	147,7	230,8		300,0	Vert
40,0	72,0	72,0	81,0	72,0	144,0	225,0		340,0	Rouge ou orange
41,0	70,2	70,2	79,0	70,2	140,5	219,5		360,0	Vert
42,0	68,6	68,6	77,1	68,6	137,1	214,3		400,0	Rouge ou orange
43,0	67,0	67,0	75,3	67,0	134,0	209,3		420,0	Vert
44,0	65,5	65,5	73,6	65,5	130,9	204,5		460,0	Rouge ou orange
45,0	64,0	64,0	72,0	64,0	128,0	200,0		480,0	Vert
46,0	62,6	62,6	70,4	62,6	125,2	195,7		520,0	Rouge ou orange
47,0	61,3	61,3	68,9	61,3	122,6	191,5		540,0	Vert
48,0	60,0	60,0	67,5	60,0	120,0	187,5		580,0	Rouge ou orange
49,0	58,8	58,8	66,1	58,8	117,6	183,7		600,0	Vert
50,0	57,6	57,6	64,8	57,6	115,2	180,0		640,0	Rouge ou orange

2. Les DUDU et la promo d'ABRICOT DEPOT

On résout l'équation $0{,}85x = 0{,}8x + 23$ et on trouve $x = 460$.
La carte devient rentable à partir de 460 €.

chapitre 6

Proportionnalité

I. Le programme

Thème B – Organisation et gestion de données, fonctions

La plupart des notions travaillées dans ce thème ont déjà été abordées aux cycles précédents. Au cycle 4, les élèves apprennent à utiliser une représentation adaptée de données pour en faire une interprétation critique. Ils abordent les notions d'incertitude et de hasard, afin de construire une citoyenneté critique et rationnelle. Ils apprennent à choisir une méthode adaptée au problème de proportionnalité auquel ils sont confrontés. Ils découvrent progressivement la notion de fonction, qui leur permet d'accéder à de nouvelles catégories de problèmes.

Attendus de fin de cycle

- Résoudre des problèmes de proportionnalité.
- Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Résoudre des problèmes de proportionnalité	
■ **Reconnaitre une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.**	■ Étudier des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non ; ces relations peuvent être exprimées par : – des formules (par exemple, la longueur d'un cercle ou l'aire d'un disque comme fonction du rayon, la loi d'Ohm exprimant la tension comme fonction de l'intensité) ; – des représentations graphiques (par exemple, des nuages de points ou des courbes) ; – un tableau (dont des lignes ou des colonnes peuvent être proportionnelles ou non).
■ **Résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle.** ■ **Résoudre des problèmes de pourcentage.** – Coefficient de proportionnalité.	■ Compléter un tableau de proportionnalité en utilisant, par exemple, le produit en croix. ■ Calculer et interpréter des proportions (notamment sous forme de pourcentages) sur des données économiques ou sociales ; appliquer des pourcentages (par exemple, taux de croissance, remise, solde, taux d'intérêt) à de telles données. ■ Établir le fait que, par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95 ; proposer quelques applications (par exemple, on n'additionne pas les remises).

** En **gras** : ce qui est étudié dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

La proportionnalité occupe toujours une place centrale dans les programmes du cycle 4. Les nouveaux outils découverts et étudiés en cycle 3 autour de la proportionnalité sont repris et approfondis en début de cycle 4. Le recours au tableau permet à la fois la reconnaissance des situations de proportionnalité et aussi la recherche de quatrième proportionnelle. La détermination de pourcentages, l'utilisation et le calcul d'échelle de plan peuvent aussi être travaillés à l'aide de tableaux.
Ici, les activités autour des grandeurs composées (grandeurs quotients et grandeurs composées) viennent enrichir la palette des situations étudiées avec les élèves.
Une grande part des activités et exercices a donc été réservée à la résolution de problèmes.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer une quatrième proportionnelle ■ Vidéo « *Je comprends* » : Effectuer des calculs de pourcentage ■ Vidéo « *Je comprends* » : Effectuer des calculs de vitesse
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Tableur ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les SOLDES !!!

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Utiliser la proportionnalité pour résoudre des problèmes

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité propose aux élèves de résoudre une situation dans laquelle deux grandeurs sont proportionnelles : le temps et le volume d'eau écoulé.
Aucune méthode de calcul n'est imposée pour déterminer les quatrièmes proportionnelles qui sont attendues. Les élèves pourront donc montrer différentes techniques : utilisation ou non de tableaux, passage par l'unité, utilisation de l'égalité de produits en croix…

• Correction

1. 400 litres en une heure.
2. Volume $= 200\ \text{dm} \times 60\ \text{dm} \times 0{,}03\text{dm} = 360\ \text{dm}^3$ soit 360 L.
Il faut 54 minutes.

Activité 2. Appliquer des hausses et des baisses de pourcentages

• Considérations didactiques et mise en pratique

Dans les classes antérieures, les calculs de pourcentage ont été introduits avec la notion de proportionnalité. La classe de Troisième insiste sur le caractère plus formel des calculs de pourcentages. Ainsi, augmenter un nombre de t % revient à le multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$.
L'activité place l'élève dans quelques contextes classiques du type augmentation ou diminution de prix. La fin de l'activité donnera l'occasion de démontrer les propriétés qui seront formalisées dans la leçon.

• Correction

A. 1. 23,00 €.
2. 13,80 €.
B. 2. 31,5 € ; 41,3 € ; 55,3 €.
C. Prendre t % d'un nombre n, c'est calculer $\dfrac{t}{100} \times n$.
Donc diminuer un nombre de t %, c'est calculer :
$t - \dfrac{t}{100} \times n = \dfrac{100 - t}{100} \times n$.
Conclusion : diminuer un nombre de t %, c'est le multiplier par $\dfrac{100 - t}{100}$ soit $\dfrac{1 - t}{100}$.
Donc augmenter un nombre de t %, c'est calculer :
$t + \dfrac{t}{100} \times n = \dfrac{100}{100} \times n$.
Conclusion : augmenter un nombre de t %, c'est le multiplier par $\dfrac{100 + t}{100}$ soit $\dfrac{1 + t}{100}$.

Activité 3. Utiliser les grandeurs produits et les grandeurs quotients

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité, assez longue, plonge les élèves dans un contexte moderne : celui du débit d'information numérique. Elle présente un contexte tout à fait adapté pour l'étude d'une grandeur composée que les élèves retrouvent dans leur quotidien. Les compétences mathématiques mises en jeu dans cette activité sont nombreuses :

– utilisation d'écriture avec des puissances ;
– calcul de grandeurs par proportionnalité ;
– utilisation de grandeurs quotients.

• Correction

A. 1. a. 5 kb $= 5 \times 10^3$ b **b.** 3,2 Mb $= 3,2 \times 10^6$ b
c. 150 Gb $= 1,5 \times 10^{11}$ b
B. 2. a. 1 680 Mb en une minute.
b. Environ 36 secondes pour 1 Gb.
3. a. 15 000 Mb, soit 15 Gb en une minute.
b. 4 secondes pour 1 Gb.
C. 4. a. $28 : 8 = 3,5$ Mo/s
b. 210 Mo par minute. 12,6 Go par heure
c. Environ 1 min 12 s pour 250 Mo.
d. $\frac{250}{120}$ donne environ 2,08 Mo/s, soit environ 16,7 Mb/s.
5. a. 31,25 Mo/s en théorie.
b. 19,4 Mo/s, soit 155,5 Mb/s.

■ Objectif 1. Utiliser la proportionnalité pour résoudre des problèmes

Je m'entraine

1 **a.** 1 050 L
b. 1 250 $
c. 1 700 m
d. 300 L
e. 350 $
f. 400 m

2 **1. a.** 19,92 g de lipides.
b. 37,44 g de glucides.
2. 10 % de 2 700 kcal = 270 kcal.
3 casse-croutes apportent 261 kcal.

3 **1.** $15 \times 400 = 6\,000$ m.
2. $5\,000 : 400 = 12,5$ min, soit 12 min et 30 sec.

4 $\frac{70}{52,5} = \frac{4}{3}$.

5 **1.** $v = \frac{d}{t} = \frac{200}{2,5} = 80$ km/h.
2. a. $d = v \times t = 80 \times 3,25 = 260$ km.
b. $d = v \times t = 80 \times 0,70 = 56$ km.
c. $d = v \times t = 80 \times 3,6 = 288$ km.
3. $t = \frac{d}{v} = \frac{540}{80} = 6,75$ h = 6h 45 min.

6 **1.** $500\,000 \times 20$ cm = 10 000 000 cm = 100 km
2. 258 km : 500 000 = 25 800 000 cm : 500 000 = 51,6 cm

Je résous des problèmes simples

7 **1.** $24,00 : 400 = 28,80 : 480 = 19,50 : 325 = 0,06$ donc les tarifs sont proportionnels à la distance.
2. Jeudi : $170 \times 0,06 = 10,20$ €. Vendredi : 21,00 €. Samedi : 23,40 €. Dimanche : 35,40 €.

8 **1.** $340 \times 60 = 20\,400$ m.
2. $2\,000 : 340 \approx 5,9$ secondes.

9 **1.** $150\,000\,000 : 300\,000 = 500$ s, soit 8 min 20 sec.
2. $300\,000 \times 3600 \times 24 \times 365,25 \approx 9,5 \times 10^{12}$ km.

10 **1. a.** $v = \frac{d}{t} = \frac{7,5}{2,50} \approx 3$ km/h.
b. $3 \times \frac{2}{3} \approx 2$ km.
c. 9,5 km : 4 km/h ≈ 2,375 h soit 2 h 23 min environ. Il arrivera vers 16 h 23.
2. Le trajet est d'environ 9 km. Il mettra donc 3 h. Il arrivera vers 12 h 00.

11 L'échelle est la proportion entre 30 cm et 18m. $\frac{30}{1800} = \frac{1}{600}$.

■ Objectif 2. Manipuler des variations exprimées en pourcentage

Je m'entraine

12 **1.** c **2.** b **3.** c **4.** a

13 **a.** 6 € **b.** 7,5 L **c.** 24 g
d. 6,5 € **e.** 60 L **f.** 75 g

14 **a.** 75 m **b.** 65 kg **c.** 125 €
d. 25 $ **e.** 35 Mo **f.** 0 L

15

Ancien Prix	Baisse de …	Multiplier l'ancien prix par …	Nouveau prix
40,00 €	30 %	0,7	28,00 €
260,00 €	20 %	0,8	208,00 €
89,50 €	10 %	0,9	80,55 €
11,20 €	5 %	0,95	10,64 €

16

Ancien Prix	Augmentation de …	Multiplier l'ancien prix par …	Nouveau prix
70,00 €	30 %	1,3	91,00 €
310,00 €	20 %	1,2	372,00 €
99,50 €	10 %	1,1	109,45 €
13,40 €	5 %	1,05	14,07 €

17

Ancien Prix	Variation de ...	Nouveau prix
17,00 €	Augmentation de 42 %	24,14
450,00 €	Augmentation de 23 %	553,50 €
80,00 €	Baisse de 35 %	52,00 €
17,50 €	Baisse de 26 %	12,95 €

Je résous des problèmes simples

18 $15 \times 0{,}85 = 12{,}75$ € ;
$28 \times 0{,}85 = 23{,}80$ € ;
$45 \times 0{,}85 = 38{,}25$ € ;
$62 \times 0{,}85 = 52{,}70$ €.

19 $800 : 1{,}60 = 500$ Go.

20 $12{,}5 \times 1{,}12 = 14$.

21 $1{,}15 \times 1{,}20 = 1{,}38$ donc augmentation de 38 %.

22 $5 \times 1{,}15 = 5{,}75$. Chloé promet un $\frac{5{,}75}{20}$.

23 $1{,}10 \times 1{,}10 = 1{,}21$ c'est-à-dire une augmentation de 21 %.

24 $\frac{18{,}20}{28{,}00} = 0{,}65$ donc une baisse de 35 %.

25 $0{,}8 \times 1{,}2 = 0{,}96$ donc une baisse de 4 %.

26 Forfait révision : 71,00 € HT
Pose Bougies : 6,92 € HT
Joints : 2,40 € HT
Filtre : 15,80 €
Bougies : 6,04 € HT
Total HT : 102,16 €
Total TTC : 122,59 €

27 **1.** Au bout d'un an : $341{,}25 \times 1{,}02 = 348{,}08$ €
2. Au bout de deux ans : $341{,}25 \times 1{,}02^2 = 355{,}04$ €
Au bout de cinq ans : $341{,}25 \times 1{,}02^5 = 376{,}77$ €

■ Objectif 3. Manipuler des grandeurs produits et des grandeurs quotients

Je m'entraine

28 **a.** 10 m/s = 36 km/h **b.** 500 m/min = 30 km/h **c.** 20 km/h

29 **1.** $450 : 75 = 6$ min.
$2\,000 : 75 = 26{,}67$ min soit 26 min 40 s.
2. $60 \times 75 = 4\,500$ Mo.

30 $t = \frac{d}{v} = \frac{234}{89} = 2{,}629$ h soit 2 h 38 min.

31 **1.** 80 nœuds = $80 \times 1{,}852 = 148$ km/h environ donc il a raison.
2. 70 km/h : $1{,}852 = 38$ nœuds environ.

32 36 m = 36 000 mm.
$\frac{36\,000}{1{,}5} = 24\,000$ s = 400 min soit 6 h et 40 min

33 **1.** 252 720 km/h.
2. Environ 24 jours.

Je résous des problèmes simples

34 **1.**

Pays	Densité
France	121,6976206
Espagne	95,38005317
Italie	205,3418318
Suisse	196,702107
Allemagne	226,4696054
Belgique	370,9372707
Luxembourg	220,5150812
Royaume-Uni	262,0980779

2. Pays le plus dense : Belgique.
Pays le moins dense : Espagne.
3. $102 \times 5\,900\,000 = 602\,000\,000$ habitants environ.

35 **1.** 1 357 km/h = 376,9 m/s donc il a atteint son objectif.
2. $v = \frac{d}{t} = \frac{36\,259}{259} = 140$ m/s soit 504 km/h de moyenne.

36 **1.** Congélateur : $90 \times 24 = 2160$ W·h = 2,160 kW·h.
Ordinateur : $350 \times 4 = 1400$ W·h = 1,4 kW·h.
2. Congélateur :
2,160 kW·h × 365 jours × 0,145 €/kW·h = 114,31 €.
Ordinateur : 1,4 kW·h × 365 jours × 0,145 €/kW·h = 74,10 €.

37 **1.** $35 \times 60 = 2100$ coups de rames par heure.
2. $1000 : 35 = 28{,}57$ min soit 28 min 34 s.
3. $35 \times 15 \times 3 = 1\,575$ m.

38 **1.** $V = R^2h = \pi \times 1{,}5^2 \times 350 \approx 2474$ cm^3.
2. $V \times 7{,}85 \approx 19\,420$ g soit plus de 19 kg.

■ Je travaille seul(e)

39 C **40** A **41** C **42** B **43** A

44 **1.** 5,5 km = 550 000 cm et $\frac{550\,000}{22} = 25\,000$ donc l'échelle de la carte est de $\frac{1}{25\,000}$.
2. 62,5 km = 6 250 000 cm et $\frac{6\,250\,000}{50} = 125\,000$ donc l'échelle est de $\frac{1}{25\,000}$.
3. 7980 km = 798 000 000 cm et $\frac{798\,000\,000}{28} = 28\,500\,000$ donc l'échelle est de $\frac{1}{28\,500\,000}$.

45 **1.** Environ 50 m.
2. Environ 160 m.

3. Les distances de freinage ne sont pas proportionnelles à la vitesse. Les graphiques ne sont pas des droites.

46 $120 \times 1,15 = 138$ €.

47 $\frac{27}{32} = 0,84375$ donc ceci correspond à une baisse de 15,625 %.

48 **1.** $158 \times 0,75 = 118,50$ €.
2. $\frac{27}{225} = 0,12$ donc 12 %.
3. $245 : 0,70 = 350$ €.

49 **1.** $1,25 \times 0,80 = 1$.
2. Donc augmenter de 25 % (multiplier par 1,25) puis diminuer de 20 % (multiplier par 0,8) revient à ne faire aucune variation.
3. De même $1,60 \times 0,625 = 1$.

50 $116 \times 0,60^8 = 1,95$ m.
$116 \times 0,60^9 = 1,17$ m.
Donc après le 8e rebond, la balle ne remonte pas au-dessus de 1,60 m.

51 **1.** $190 \times 2,5 = 380$ Wh $= 0,38$ kWh.
2. $380 \times 3600 = 1\,368\,000$ Ws, c'est-à-dire 1 368 000 J.

52 **1.** $t = \frac{d}{v} = \frac{6\,300}{189} \approx 33,33$ h $= 33$ h 20 min.
2. $v = \frac{d}{t} = 5\,950 : (1 + \frac{26}{60}) = 1\,733$ km/h.
3. $d = v \times t = 603 \times \frac{10,8}{3\,600} = 1,809$ km soit 1 809 m.

53 **1.** $800 \times 3,5 = 2\,800$ tours.
2. $\frac{3\,800}{800} = 4,75$ min soit 4 min 45 s.

54 **1.** $\frac{4\,500}{60} = 75$ tours par seconde.
2. 15 mg/L $= 0,015$ g/L.
3. 8,96 kg/dm^3 $= 8,96$ g/cm^3 .

■ Je résous des problèmes

55 **1.** La tache mesure environ $\frac{1}{4}$ du diamètre de la planète en longueur et sa largeur est environ la moitié de sa longueur. Ainsi, la tache mesure environ 35 000 km sur sa longueur et 17 500 km sur sa largeur.
2. Notre planète Terre (diamètre d'environ 13 000 km) tient entièrement dans cette tache.

56 **1.** Vrai
2. Vrai
3. Faux

57 **1.** Calcul de la surface :
carré + triangle $= 7,5 \times 6 + 7,5 \times \frac{3}{2} = 56,25$ m^2.
Il faut donc 3 pots, soit 310,35 €.
2. $\frac{(343,50 \times 0,60)}{3} = 68,70$ € par mensualité.

58 Pour un exemple de comparaison, partons du principe que 100 g coûte 100 €.
On a donc 1 €/g.
Offre de gauche : 20 % en plus. On a donc 120 g pour 100 €.
Soit $\frac{100}{120} = 0,833$ €/g.
Offre de droite : 20 % de remise. On a donc 100 g pour 80 €.
Soit $\frac{80}{100} = 0,800$ €/g.
L'offre de droite est plus intéressante.

59 L'erreur est que les 30 % ne s'appliquent pas à la même base de calcul.
Il faut faire $1,2 \times 1,3 = 1,56$ donc c'est une hausse de 56 %.

60 **1.** $v = \frac{d}{t} = \frac{131}{\left(1 + \frac{21}{60}\right)} = 97$ km/h
2. La distance à vol d'oiseau est d'environ 110 km.
3. $t = \frac{d}{v} = \frac{110}{85} = 1,29$ h $=$ 1h 18 min environ.
Le pigeon arrive en premier.

61 Une pièce de 10 centimes a un diamètre de 19,75 mm.
Elle représente un noyau de 2×10^{-15} m.

	Diamètre noyau	Distance noyau - électron
Longueur maquette (m)	0,01975	
Longueur réelle (m)	2×10^{-15}	$5,3 \times 10^{-11}$

Donc la distance noyau-électron sur la maquette est de $(5,3 \times 10^{-11}) \times \frac{0,01975}{(2 \times 10^{-15})} = 532,375$ m.

62 **1. a.** MP3 + casque :
$(155 + 86) \times 0,8 = 192,80$ € donc il peut les acheter.
b. MP3 + haut-parleurs :
$(155 + 79) \times 0,8 = 187,20$ € donc il peut les acheter.
c. MP3 + casque + haut-parleurs :
$(155 + 86 + 79) \times 0,8 = 256,00$ € donc il ne peut pas les acheter.
2. c : $v = 1,375$ g

63 **Première étape :** On calcule le montant des loyers pour les trois mois.
Il y a 30 jours en juin, 31 jours en juillet et 31 jours en aout soit $30 + 31 + 31 = 92$ jours.
Pour la paillote, il faut payer $2\,500 \times 3 = 7\,500$ €.
Pour la boutique, il faut payer $60 \times 92 = 5\,520$ €.
Deuxième étape : On fait maintenant une prévision des ventes en tenant compte de la météo. Il faut calculer le nombre de jours que représente 75 % du temps.
75 % de $92 = \frac{75}{100} \times 100 = 69$.
On peut prévoir qu'il y aura 69 jours de soleil et donc 23 jours de temps nuageux ou pluvieux.
Pour la paillote, cela représente une vente de :
500 € $\times 69 + 50$ € $\times 23 = 35\,650$ €.

Pour la boutique en ville, cela représente une vente de :
$350\text{ €} \times 69 + 300\text{ €} \times 23 = 31\,050\text{ €}$.
3e étape : On calcule les bénéfices dans chaque cas : il faut retirer le cout du loyer aux prévisions des ventes.
Pour la paillotte, on obtient $35\,650 - 7\,500 = 28\,150\text{ €}$.
Pour la boutique en ville, on obtient :
$31\,050 - 5\,520 = 25\,530\text{ €}$.
Peio a donc intérêt à louer une paillotte.

■ Dans les autres matières

64 **1.** $1\,000\text{ kg/m}^3 = 1\text{ kg/L}$.
2. $\frac{0{,}458\text{ g}}{0{,}5} = 0{,}916\text{ kg/L}$.
3. Pour 1 kg d'eau liquide (donc 1 L) placé au congélateur, le changement d'état va induire une augmentation du volume passant de 1 L à $1 : 0{,}916 = 1{,}0917$ L. La bouteille pourrait se casser.

65 **1.** Un tour $= (95 + 60) \times 2 = 310$ m.
2. $\frac{25}{15} = 1{,}67$ min soit 1 min 40 s par tour.
3. $v = \frac{d}{t} = \frac{(6 \times 315)}{9} = 12{,}6$ km/h.
$\frac{9}{6} = 1{,}5$ min $= 1$ min 30 s par tour. Donc l'objectif sera atteint.

66 Si les quatre fontaines fonctionnent en même temps pendant quatre heures, on peut remplir 10 bassins car $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.
Donc elles peuvent remplir un bassin en $\frac{4}{10}$ h soit $\frac{240}{10}$ minutes c'est-à-dire 24 minutes.

■ Jeux mathématiques

67 $1{,}01^{69} = 1{,}987$.
$1{,}01^{70} = 2{,}007$ donc il faut augmenter 70 fois.

68 Il y a un 29 février tous les 4 ans, soit 1 jours sur 1 461. Sachant qu'il y a 66 millions de personnes en France environ, on peut estimer qu'il y a $\frac{66\,000\,000}{1461} = 45\,175$ personnes nées un 29 février en France.

69 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < 1$ donc il faut découper une pizza en 2.
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < 1$ donc il faut découper une deuxième pizza en 3.
$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ donc il faut découper la troisième pizza en 4 ou en 5.
Il y a deux solutions : $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times 360 = 390$ ou $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \times 360 = 372$ grammes.

70 $25 \times 5 = 125$ dents.
$\frac{125}{12} = 10{,}4$ donc il faut faire un peu plus de 10 tours de petite roue.

71 $13^1 = 13$;
$13^2 = 169$;
$13^3 = 2\,197$;
$13^4 = 28\,561$;
$13^5 = 371\,293$.
Il n'y a donc que quatre unités possibles : 3, 9, 7 et 1.
$2\,017 = 4 \times 504 + 1$ donc 3^{2017} aura la même unité que 3^1 c'est-à-dire 3.

72 **a.** Dans chacune des 3 directions, le nombre d'allumettes pour 8 petits cubes (carrés de 2 sur 2 sur chaque face) $= 3 \times 3 \times 2 = 18$ allumettes.
Soit au total $3 \times 18 = 54$ allumettes.
b. Dans chacune des 3 directions, le nombre d'allumettes pour 1 000 petits cubes (carrés de 10 sur 10 sur chaque face) $= 11 \times 11 \times 10 = 1\,210$ allumettes.
Soit au total $3 \times 1\,210 = 3\,630$ allumettes.

■ Devoirs à la maison

73 **1.** Au niveau de la masse : 300 parpaings pèsent 3 000 kg et la charge maximale d'un trajet est de 1 700 kg. Il faudra donc au moins 2 trajets.
Au niveau du volume, 300 parpaings occupent un volume de 3 m^3 mais le volume utile du véhicule est supérieur donc pas de problème.
2. Deux trajets représentent 40 km.
Soit 55 € de location + le carburant.
Consommation de carburant : $\frac{40}{100} \times 8 = 3{,}2$ L à 1,50 € le litre : 4,80 €.
Coût total du transport : 59,80 €.

74 Il reste 1 h 50 min de trajet à la voiture sur un trajet de 3 h 45 min.
On va calculer par proportionnalité la distance restant à parcourir par rapport au total de 385 km.
Donc une distance $d = 385 \times \left(1 + \frac{50}{60}\right) / \left(3 + \frac{45}{60}\right) \approx 188{,}2$ km environ.

■ Avec un logiciel

Activité 1. Vitesse planétaire

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Cette activité permet aux élèves d'étudier un problème scientifique complexe : la vitesse d'un point situé à l'équateur de chacune des planètes du système solaire.
Elle permet également de manipuler dans une feuille de calcul des écritures de différents formats : nombres entiers, écritures scientifiques…
Les compétences mathématiques sont donc multiples :
– calcul de vitesse ;
– calcul de longueur d'un cercle ;
– utilisation d'écriture scientifique ;
– calcul de temps.
Les compétences tableur utilisées ici ne sont pas très complexes (saisie de formules simples, recopie de formules), mais la bonne organisation du tableau de départ sera la clé de la simplicité des formules à saisir.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Nom de la planète**	Diamètre équatorial	**circonférence**	Durée d'une rotation			**Durée d'une rotation**	**vitesse**
2		(en km)	**(en km)**	jours	heures	minutes	**en nombre décimal d'heure**	**(en km/h)**
3	**Mercure**	4,88E+03	**3,07E+04**	58	15	38	**1407,63**	**21,78**
4	**Vénus**	1,21E+04	**7,60E+04**	243	0	14	**5832,23**	**13,04**
5	**Terre**	1,27E+04	**7,98E+04**	0	23	56	**23,93**	**3 334,11**
6	**Mars**	6,80E+03	**4,27E+04**	0	24	37	**24,62**	**1 735,64**
7	**Jupiter**	1,43E+05	**8,98E+05**	0	9	53	**9,88**	**90 910,17**
8	**Saturne**	1,20E+05	**7,54E+05**	0	10	24	**10,40**	**72 498,29**
9	**Uranus**	5,10E+04	**3,20E+05**	0	15	30	**15,50**	**20 673,71**
10	**Neptune**	4,95E+04	**3,11E+05**	0	16	7	**16,12**	**19 297,89**

Activité 2. Les lingots

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet aux élèves d'étudier un autre problème utilisant une grandeur composée : la masse volumique des métaux.

Au niveau mathématique, les compétences sont :

– calcul de volume ;

– utilisation d'une grandeur composée pour un calcul par proportionnalité.

Les compétences tableur utilisées ici ne sont pas très complexes (saisie de formules simples, recopie de formules).

La dernière partie de l'activité permettra d'utiliser le tableur pour une recherche de dimensions. Plusieurs stratégies seront alors possibles : par tâtonnements en utilisant la programmation des cellules effectuée au départ, par d'autres calculs…

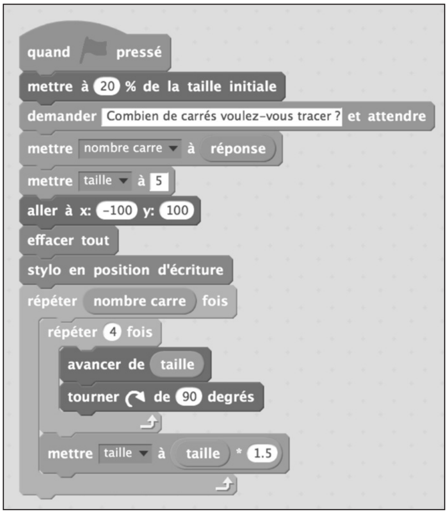
Activité 3. Des carrés en nombre

• Considérations didactiques et mise en pratique

L'objectif de cette activité est d'utiliser Scratch pour construire une suite de carrés régulièrement agrandis.

Ceci permet à la fois la construction de figures simples, mais aussi l'utilisation de plusieurs boucles et de variables pour construire un nombre de carrés choisi par l'utilisateur.

• Correction



■ Tâches complexes

1. Une piscine à remplir

Le volume de la piscine est de 3 750 m^3 soit 3 750 000 litres.

Avec une pompe débitant 36 000 L/h, le temps nécessaire est de 104,16 heures soit environ 104 h 10 min.

Ceci correspond à 4 jours 8 heures 10 min.

En commençant lundi à 8h, la piscine sera remplie vendredi à 16 h 10 min.

Les employés doivent revenir vendredi à 14 h 10 min.

2. Les SOLDES !!!

Baisser un prix de 60 % revient à le multiplier par 0,4.

Baisser un prix de 40 % revient à le multiplier par 0,6.

Baisser un prix de 60 % puis encore de 40 % revient à le multiplier par 0,4 × 0,6 soit 0,24 ce qui correspond à une baisse de 76 %.

chapitre 7

Statistiques et probabilités

I. Le programme

Thème B – Organisation et gestion de données, fonctions

La plupart des notions travaillées dans ce thème ont déjà été abordées aux cycles précédents. Au cycle 4, les élèves apprennent à utiliser une représentation adaptée de données pour en faire une interprétation critique. Ils abordent les notions d'incertitude et de hasard, afin de construire une citoyenneté critique et rationnelle. Ils apprennent à choisir une méthode adaptée au problème de proportionnalité auquel ils sont confrontés. Ils découvrent progressivement la notion de fonction, qui leur permet d'accéder à de nouvelles catégories de problèmes.

Attendus de fin de cycle

- Interpréter, représenter et traiter des données.
- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes	
■ Recueillir des données, les organiser. ■ Lire des données sous forme de données brutes, de tableau, de graphique. ■ Calculer des effectifs, des fréquences. – Tableaux, représentations graphiques (diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires, histogrammes). ■ Calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion d'une série statistique. – Indicateurs : moyenne, médiane, étendue.	■ Utiliser un tableur, un grapheur pour calculer des indicateurs et représenter graphiquement les données. ■ Porter un regard critique sur des informations chiffrées, recueillies, par exemple, dans des articles de journaux ou sur des sites web. ■ Organiser et traiter des résultats issus de mesures ou de calculs (par exemple, des données mises sur l'environnement numérique de travail par les élèves dans d'autres disciplines) ; questionner la pertinence de la façon dont les données sont collectées. ■ Lire, interpréter ou construire un diagramme dans un contexte économique, social ou politique : résultats d'élections, données de veille sanitaire (par exemple, consultations, hospitalisations, mortalité pour la grippe), données financières relatives aux ménages (par exemple, impôts, salaires et revenus), données issues de l'étude d'un jeu, d'une œuvre d'art…
Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilités	
■ Aborder les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples. ■ Calculer des probabilités dans des cas simples. – Notion de probabilité. – Quelques propriétés : la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1 ; probabilité d'événements certains, impossibles, incompatibles, contraires.	■ Faire le lien entre fréquence et probabilité, en constatant matériellement le phénomène de stabilisation des fréquences ou en utilisant un tableur pour simuler une expérience aléatoire (à une ou à deux épreuves). ■ Exprimer des probabilités sous diverses formes (décimale, fractionnaire, pourcentage). ■ Calculer des probabilités dans un contexte simple (par exemple, évaluation des chances de gain dans un jeu et choix d'une stratégie).

II. Contexte du chapitre

Au cours du cycle 3, les élèves ont été mis en situation de prendre de l'information à partir de tableaux, de diagrammes ou de graphiques, puis de réaliser ce type de présentation pour organiser des données.
Au cycle 4, plusieurs nouvelles compétences mathématiques font leur apparition : le calcul de moyenne, de médiane, d'étendue d'une série de données.
L'utilisation de feuilles de calcul reste un attendu fort du programme. Elles permettent, à l'aide de formules, de réaliser des calculs sur un grand de données mais aussi de représenter graphiquement ces données. Plusieurs de nos activités et de nos exercices, souvent conduits à partir d'exemples en liaison, avec l'enseignement des autres disciplines et l'étude des thèmes de convergence, permettent de développer à la fois ces compétences mathématiques et ces compétences « tableur ».
Les caractéristiques de position d'une série statistique sont introduites dès le début du cycle. Les élèves rencontrent des caractéristiques de dispersion à partir de la 4^{e}.
Parallèlement, dès le début et tout au long du cycle 4, sont abordées des questions relatives au hasard, afin d'interroger les représentations initiales des élèves, en partant de situations issues de la vie quotidienne (jeux, achats, structures familiales, informations apportées par les médias, etc.), en suscitant des débats.
On introduit et consolide ainsi petit à petit le vocabulaire lié aux notions élémentaires de probabilités (expérience aléatoire, issue, probabilité). Les élèves calculent des probabilités en s'appuyant sur des conditions de symétrie ou de régularité qui fondent le modèle équiprobable.
À partir de la 4^{e}, l'interprétation fréquentiste permet d'approcher une probabilité inconnue et de dépasser ainsi le modèle d'équiprobabilité mis en œuvre en 5^{e}.
En classe de 3^{e}, l'ensemble de ces compétences est retravaillé avec des activités et des exercices plus riches, souvent en rapport avec des thèmes de la vie courante et liés à autres disciplines. Les méthodes de calcul et le sens des caractéristiques de position et de dispersion sont travaillés.
L'idée reste bien de développer en priorité ces compétences mathématiques et au travers d'elles des compétences « tableur ».
Remarque au sujet des travaux utilisant les feuilles de calcul : Très souvent, les enseignants recherchent des activités « pour démarrer » avec le tableur. Nous proposons dans ce manuel des activités qui peuvent être mises en œuvre avec les élèves ayant déjà ou pas encore utilisé un tableur. Des fiches méthodes – en fin de manuel – permettent d'expliquer les aspects techniques des fonctionnalités des feuilles de calcul et favorisent une activité plus autonome de la part de l'élève. Avant des séances en salle multimédia, un premier usage collectif d'un tableur, en classe, à l'aide d'un vidéoprojecteur, permet aux élèves, non seulement de percevoir le tableur comme un outil naturel pour faire des mathématiques, mais également de découvrir des fonctionnalités de base de cet outil logiciel. Nos activités et nos exercices ne sont pas des activités pour « faire du tableur » mais bien des activités et des exercices pour « faire des mathématiques à l'aide d'un tableur ».
L'objectif d'une telle initiation aux élèves de 3^{e} est de compléter l'enseignement des statistiques par une introduction à la notion d'aléatoire, aux calculs de probabilités et à la simulation. Elle permet de développer chez les élèves des capacités d'analyse et d'esprit critique, nécessaires face à de nombreuses situations du quotidien.
La mise en place du socle commun demande que les élèves en fin de collège connaissent « les notions de chance ou de probabilité ».
Ce chapitre répond pleinement à ces objectifs en permettant aux élèves de bien comprendre ce qu'est une expérience aléatoire, en passant de la fréquence d'un événement à la notion de probabilité et en mettant en jeu des activités et des exercices de la vie courante : jeux de cartes, jeux de société, problèmes de géométrie, jeux de hasard…

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble **Objectif 1** **Objectif 2** **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Fichiers modifiables des activités ■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer une moyenne, une médiane et une étendue (1) ■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer une moyenne, une médiane et une étendue (2) ■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer une probabilité ■ Vidéo « *Je comprends* » : Simuler une expérience aléatoire à l'aide du tableur
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU se disputent la télé

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Étudier une liste de données

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité basée sur un exemple très accessible, issu de la vie courante et souvent déjà étudié en géographie permet de retravailler de façon simple les notions de moyenne, de médiane et d'étendue d'une série de données.

L'étendue d'une série statistique, définie comme différence entre la plus grande valeur (ici la température la plus haute) et la plus petite valeur (ici la température la plus basse), est assez naturelle pour les élèves. Dans l'exemple étudié, la notion d'amplitude thermique peut être évoquée.

L'usage d'un tableur est possible et permet d'introduire les fonctions MAX et MIN.

• Correction

Pour Bordeaux : moyenne = 13,33. Médiane = 13,5.
Étendue = 17.

Pour Tamanrasset : moyenne = 13,25. Médiane = 11.
Étendue = 35.

Pour Moscou : moyenne = 0,17. Médiane = 0,5. Étendue = 14.

Activité 2. Étudier un graphique de données

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité basée sur un exemple économique issu de la vie courante permet d'abord de retravailler la capacité de l'élève à extraire des informations d'un graphique. Elle permet aussi de calculer les caractéristiques de position d'une série de données et repose le sens mathématique d'une moyenne.

• Correction

1. La recette totale est de moyenne est de :

$$250 \times 4{,}00\ € + 310 \times 6{,}00\ € + 240 \times 6{,}40\ € + 110 \times 7{,}50\ € + 460 \times 9{,}50\ € = 9\,591{,}00\ €.$$

Si chacun des 1 370 spectateurs payaient 7,00 €, on obtient (presque) la même somme : $1\,370 \times 7{,}00\ € = 9\,590{,}00\ €$.

2. Le prix médian est de 6,40 €. Cela signifie qu'au moins la moitié des spectateurs ont payé au maximum 6,40 €. Et réciproquement : au moins la moitié des spectateurs ont payé au minimum 6,40 €.

Activité 3. Calculer des probabilités

• Considérations didactiques et mise en pratique

L'objectif de cette activité est de proposer une expérience aléatoire issue d'une situation accessible à tous les élèves (un jeu de cartes). Les calculs de probabilité proposés s'obtiennent par quotient du nombre de cas favorables par rapport au nombre total de cas.

Dans une seconde partie, l'activité évoque une expérience aléatoire avec deux tirages.

• Correction

1. a. Sur 52 cartes, 13 sont des trèfles et $\frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ donc la probabilité qu'une carte tirée au hasard soit un trèfle est de 0,25.

b. et c. De même, la carte est un as avec une probabilité de $\frac{1}{13}$, un roi avec une probabilité de $\frac{1}{13}$, une figure avec une probabilité de $\frac{3}{13}$, l'as de trèfle avec une probabilité de $\frac{1}{52}$.

2. Avec remise, la probabilité qu'il ait deux cartes de la même « couleur » est de $\frac{1}{4}$ soit 0,25.

3. Sans remise, la probabilité qu'il ait deux cartes de la même « couleur » est de $\frac{12}{52}$ soit environ 0,23 ;
deux cartes de même « rang » est de $\frac{3}{52}$ soit environ 0,058.

Activité 4. Simuler une expérience aléatoire à l'aide d'un logiciel

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet aux élèves de réaliser une simulation simple d'une expérience aléatoire à l'aide d'un tableur.

Les objectifs sont multiples :

– savoir programmer une simulation d'expérience aléatoire sur tableur ;

– comprendre que les résultats de deux simulations peuvent être différents ;

– percevoir, en étudiant l'évolution des fréquences, que la réalisation d'un grand nombre de simulations permet de tendre vers la probabilité d'un événement.

• Correction

La réalisation de 1 000 simulations de lancers de dés doit permettre de voir une fréquence d'apparition du « 6 » qui tend vers $\frac{1}{6}$.

■ Objectif 1. Étudier une liste de données

Je m'entraine

1 **a.** Moyenne = 11. Médiane = 9. Étendue = 14.
b. Moyenne = 7,33. Médiane = 7. Étendue = 10.
c. Moyenne = 4,25. Médiane = 3,5. Étendue = 6.

2 **1.** La plus grande valeur est 41 m. La plus petite est 32 m.
2. L'étendue est de 41 – 32 = 9 m. Ce n'est pas une série très dispersée.
3. $(35 + 38 + 34 + 41 + 32) : 5 = 36$ donc la hauteur moyenne d'un des peupliers est de 36 m.
4. La médiane est de 38 m, donc il y a autant d'arbre qui mesurent moins de 38 m que d'arbre qui mesurent plus de 38 m.

3 **1.** Prix moyen = 11,20 €
2. Prix médian = 11,50 €

4 $61 + 62 + 61 + 58 + 56 + 63 + 55 + 64 + 61 + 63 + 63 + 65 = 732$ donc la masse totale de la douzaine d'œufs est de 732 g.
1. $732 : 12 = 61$ donc la masse moyenne d'un œuf est de 61 g.
2. La médiane de cette série de masses est de 61 g.
3. $65 - 55 = 10$ donc l'étendue de cette série est de 10 g.

5 **1.** Moyenne = 4,42. Médiane = 4,6. Étendue = 1,7.
2. Moyenne = 12,5. Médiane = 9. Étendue = 18.
3. Moyenne = 5,95. Médiane = 6,8. Étendue = 6,4.

6 Réponse **c** : La médiane de la série de valeurs est inférieure à la moyenne de cette série de valeurs.

Je résous des problèmes simples

7 **1.** $20{,}69 - 20{,}09 = 0{,}60$ donc l'étendue de cette série est de 0,60 s.
2. $(20{,}25 + 20{,}12 + 20{,}48 + 20{,}09 + 20{,}69 + 20{,}19 + 20{,}38) : 7 \approx 20{,}31$ donc la moyenne arrondie au centième de cette série est de 20,31 s.
3. La médiane de cette série est de 20,25 s.
4. $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{200}{20{,}09} \approx 9{,}955$ donc la vitesse moyenne de l'athlète classé premier est d'environ 9,955 m/s.

8 **1.** La masse salariale mensuelle de cette entreprise est de 11 150 €.
2. Le salaire moyen est de 1 858 €.
3. La médiane des salaires est de 1 750 €.
4. L'étendue des salaires est de 950 €.

9

	=SOMME(B4:B18)
Total des ventes	**895,40 €**

	=SOMME(B4:B18)
Ticket moyen	**59,69 €**

	=SOMME(B4:B18)
Ticket médian	**55,9040 €**

10 **1.** Le jour le plus pluvieux est le jeudi avec 16 mm.
2. Le jour le moins pluvieux est le samedi avec 4 mm.
3. Léa a raison, la moyenne est de 9 mm.

11 **1.** La durée totale de l'album est de 42 min 36 s.
2. La durée moyenne d'une chanson est de 4 min 44 s.
3. La médiane est de 4 min 42 s.

■ Objectif 2. Étudier un tableau ou un graphique de données

Je m'entraine

12 **a.** Moyenne = 12,5. Médiane = 10. Étendue = 10.
b. Moyenne = 30. Médiane = 8. Étendue = 116.
c. Moyenne = 1,667. Médiane = 1. Étendue = 4.

13 **1.** L'effectif total de ce groupe est de 14.
2. $\dfrac{13 \times 2 + 14 \times 6 + 15 \times 3 + 16 \times 1 + 17 \times 2}{14} \approx 14{,}6$
Donc l'âge moyen d'un participant est de 14,6 ans soit environ 14 ans 7 mois 20 jours.
3. La médiane des âges des participants est 14 ans.

14 **1.** L'effectif total est de 10.
2. L'âge moyen est de 22 ans.
3. La médiane est de 21 ans.

15 **1. a.** 3 élèves n'ont reçu aucun spam.
b. 25 élèves ont répondu au sondage.
c. $\dfrac{11}{25} = 0{,}44$ donc 44 % du nombre total d'élèves ont reçu au moins cinq spams.
2. a. Le nombre total de spams reçus par les élèves est de 90.
b. $90 : 25 = 3{,}6$ donc le nombre moyen de spams reçus par un élève est de 3,6.
c. La 13^{e} valeur est 4 donc le nombre médian de spam reçu par un élève est 4.

Je résous des problèmes simples

16 **1.** $50 + 25 + 15 + 10 + 2 = 102$ donc l'effectif de cette PME est de 102 personnes.
2. Un calcul des moyennes des salaires pondérés par les effectifs donne un salaire moyen de 1 534 €.
3. $8\,000 - 950 = 7\,050$ donc l'étendue des salaires est de 7 050 €.
4. a. $950 \times 1{,}08 = 1\,026$. Le nouveau salaire de cet ouvrier est de 1 026 €.
b. Le salaire moyen passe de 1 534,31 € à 1 571,86 € soit 37,25 € d'augmentation, c'est-à-dire + 2,4 %.

17 **1.** Mathieu a obtenu sa meilleure note au 9^{e} devoir.
2. $\dfrac{(13 + 12 + 9 + 11 + 6 + 11 + 11 + 17 + 19 + 14 + 3 + 12)}{12} = 11{,}5$
donc la moyenne des notes est de 11,5.
3. $19 - 3 = 16$ donc l'étendue de la série est de 16.
4. Mathieu a eu trois notes strictement inférieures à 10 sur 20. $\dfrac{3}{12} = 0{,}25$ soit 25 % de ses notes sous la moyenne.

18 **1.** $7{,}90 - 5{,}30 = 2{,}60$ donc l'étendue de cette série de prix est de 2,60 €.
2. Le nombre total de salles étudiées est de 87.
Un calcul de moyenne donne un prix moyen de 6,41 €.

19 **1.** 65 matchs ont été joués.
2. 151 buts ont été marqués.
3. Le nombre moyen de buts marqués est de 2,32.
4. Le nombre de but médian est 2.

■ Objectif 3. Calculer des probabilités dans des contextes divers

Je m'entraine

20 **a.** La probabilité d'avoir un 2 est $\frac{1}{12}$.
b. La probabilité d'avoir un nombre pair est $\frac{1}{2}$.
c. La probabilité d'avoir un multiple de 5 est $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
d. La probabilité d'avoir un multiple de 3 est $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

21 **1.** La probabilité de tirer une boule blanche est de $\frac{2}{3}$ (a).
2. La probabilité de tirer une boule portant le numéro 2 est de $\frac{1}{3}$ (c).
3. La probabilité de tirer une boule blanche numérotée 1 est de $\frac{1}{3}$ (a).

22 **1.** La probabilité d'avoir un 3 est $\frac{1}{6}$.
2. La probabilité d'avoir un nombre pair est $\frac{1}{2}$.

23 **1.** La probabilité de l'événement A est $\frac{1}{8}$.
2. La probabilité de l'événement T est $\frac{1}{2}$.
3. La probabilité de l'événement M est $\frac{3}{8}$.

Je résous des problèmes simples

24 La probabilité est de $\frac{1}{6}$.

25 Il y a 36 boules noires.

26 $250 \times 100 = 25\,000$ donc la surface totale est de 25 000 m^2.
$100 \times 50 : 2 + 50 \times 50 : 2 = 2\,500 + 1\,250 = 3\,750$ donc la surface humide est de 3 750 m^2.
$25\,000 - 3\,750 = 21\,250$ donc la surface en herbe est de 21 250 m^2.
$\frac{21250}{25\,000} = 0{,}85$ donc la probabilité que le matériel largué tombe sur la zone en herbe est de 0,85.
La probabilité que le matériel largué tombe sur la zone humide est de 0,15.

27 **1.** Aline a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge : 1.
2. Il faut ajouter 15 bonbons verts dans le sac d'Aline.

28 **1.** 6 nombres différents peuvent être obtenus.
2. Sans remise :
a. La probabilité d'obtenir le nombre 456 est de $\frac{1}{6}$.
b. La probabilité d'obtenir le nombre pair est de $\frac{2}{3}$.
c. La probabilité d'obtenir un nombre divisible par 3 est de $\frac{1}{3}$.
d. La probabilité d'obtenir un nombre supérieur à 550 est de $\frac{1}{2}$.
e. La probabilité d'obtenir un nombre composé de trois chiffres identiques est de 0.
3. Avec remise :
a. Il y a 27 nombres possibles.
La probabilité d'obtenir le nombre 456 est de $\frac{1}{27}$.
b. La probabilité d'obtenir le nombre pair est de $\frac{2}{3}$.
c. La probabilité d'obtenir un nombre divisible par 3 est de $\frac{1}{3}$.
d. La probabilité d'obtenir un nombre supérieur à 550 est de $\frac{15}{27} = \frac{5}{9}$.
e. La probabilité d'obtenir un nombre composé de trois chiffres identiques est de $\frac{1}{9}$.

29 On peut utiliser un arbre des possibles ou calculer toutes les possibilités.
Avec 10 caleçons et 8 chemises, Léon a 80 possibilités. Parmi celles-ci :
3 sont entièrement rouges. 6 sont entièrement vertes. 20 sont entièrement blanches.
$\frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ donc la probabilité que Léon s'habille avec une tenue d'une seule couleur est de 0,25.

■ Objectif 4. Simuler une expérience aléatoire à l'aide d'un logiciel

Je m'entraine

30 La formule b : « =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)

31 À vérifier sur un tableur.

32 À vérifier sur un tableur.

33 À vérifier sur un tableur.

34 À vérifier sur un tableur.

Je résous des problèmes simples

35 **1.** La couleur la plus présente est le jaune.
2. La fréquence du tirage du rouge semble tendre vers 0,2.
On peut penser qu'il y a 4 jetons rouges dans le sac car $\frac{4}{20} = 0{,}2$.

36 Fichier solution à disposition sur le site compagnon.
Le nombre moyen de survivants est d'environ 2,7 canards.

37 Fichier solution à disposition sur le site compagnon.
La réponse théorique : sur 432 possibilités de résultats de jeux, Hugo gagne dans 216 cas, Léa gagne dans 180 cas et il y a match nul dans 36 cas.
La probabilité 0,5 pour une victoire d'Hugo, de 0,42 pour une victoire de Léa et 0,08 pour un match nul.

38 Fichier solution à disposition sur le site compagnon.
La réponse théorique : la probabilité que la tortue gagne est de $\left(\frac{5}{6}^6 = 0{,}335\right)$. La probabilité que le lièvre est de 0,665.

Je travaille seul(e)

39 C **40** B **41** C **42** B **43** C

44 **a.** Moyenne = 4. Médiane = 5. Étendue = 5.
b. Moyenne = 16. Médiane = 17. Étendue = 6.
c. Moyenne = 39,14. Médiane = 32. Étendue = 62.
d. Moyenne = 5,4. Médiane = 6,1. Étendue = 5,3.

45 Par exemple : 10 120 130 170 170

46 **1.** 55 min 23 s + 57 min 42 s + 49 min 57 s + 58 min 27 s + 55 min 29 s + 52 min 31 s + 55 min 59 s = 385 min 28 s
$\frac{(385 \text{ minutes } 28 \text{ s})}{7} = 55 \text{ min } 04 \text{ s}$ donc le temps moyen mis pour faire un tour du lac est de 55 min 28 s.
2. La médiane de cette série de temps est 55 min 29 s.

47 **1.** L'étendue des notes est de 17 – 7 = 7.

2.

Notes	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Effectifs	2	4	1	3	5	4	0	1	3	1	1

$\frac{7\times2+8\times4+9\times1+10\times5+12\times4+14\times1+15\times3+16\times1+17\times1}{25} \approx 11{,}2$

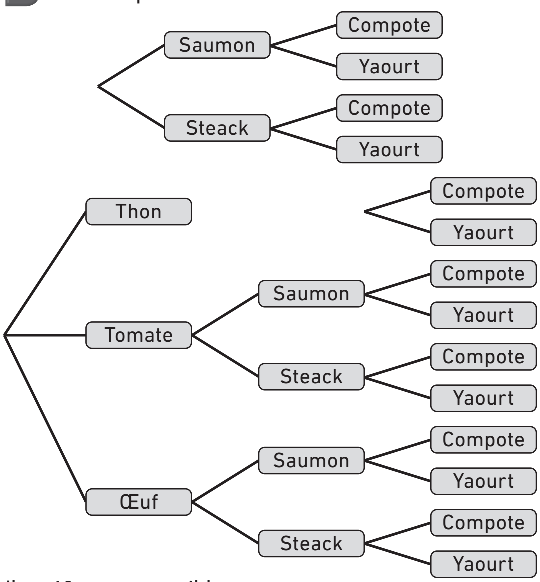
Donc la moyenne des notes est de $\frac{11{,}2}{20}$.

3. La médiane est la 13^{e} note : $\frac{11}{20}$.

4. $\frac{20}{25} = 0{,}8$ donc 80 % des élèves ont eu une note inférieure ou égale à 14.

48 **1.** $\frac{3}{20} = 0{,}15$ donc la probabilité que la glace de Martin soit à la fraise est de 0,15.
2. $\frac{12}{20} = 0{,}6$ donc la probabilité que la glace de Martin ne soit pas à la vanille est de 0,6.

49 Arbre des possibles



Il y a 12 menus possibles.

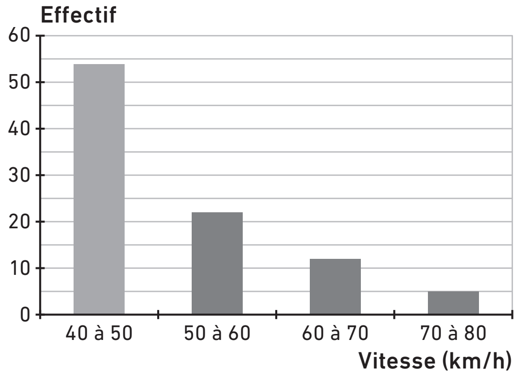
2. **a.** La probabilité qu'elle mange de la tomate est de $\frac{1}{3}$.
b. La probabilité qu'elle mange des pommes de terre est de $\frac{1}{2}$.
c. La probabilité qu'elle mange à la fois du thon en entrée et de la compote en dessert est de $\frac{2}{12}$ soit $\frac{1}{6}$.
d. La probabilité qu'Amélie ange du thon ou du saumon ou les deux à la fois est de $\frac{8}{12}$ soit $\frac{2}{3}$ donc Amélie a raison.

50 À vérifier sur tableur.
Réponse théorique : Sur 64 tirages différents, 6 donnent un total de 7. La probabilité de gagner est donc de $\frac{6}{64}$ soit 9,375 %.

51 À vérifier sur tableur.
Réponse théorique : la surface de la zone est de 8 carreaux sur un total de 100. La probabilité de se trouver dans le triangle est de $\frac{8}{100} = 0{,}08$.

Je résous des problèmes

52 **1.** 54 + 22 + 12 + 5 = 93 donc le nombre total de véhicules enregistrés est de 93.
2. On prend le centre de chaque classe et on effectue un calcul de moyenne pondérée par les effectifs :
$\frac{45 \times 54 + 55 \times 22 + 65 \times 12 + 75 \times 5}{93} \approx 51{,}56$.
Donc la moyenne des vitesses enregistrées est de 51,56 km/h.
3. La médiane est la 47^{e} vitesse. C'est donc une vitesse entre 40 et 50 km/h. On peut choisir 45 km/h.
4. 39 véhicules sur 93 dépassaient la vitesse limite autorisée. $\frac{39}{93} \approx 0{,}42$ donc 42 %.
5.



53 **1.** 956 : 4 = 239 donc le nombre moyen de spectateurs présents à une séance du dimanche était de 239.
2. La somme des spectateurs est de 4 419. Il y a eu 18 séances.
4 419 : 18 = 245,5 donc le nombre moyen de spectateurs présents à une séance de la semaine passée était de 245,5.
3. La capacité d'accueil est de 18 × 400 soit 7 200 places.
$\frac{4\,419}{7\,200} \approx 0{,}61$ donc en moyenne, le cinéma est rempli à 61 %.
Sur ce point, le directeur à raison.

Le vendredi, le taux d'occupation est de $\frac{754}{800}$ soit 94 % environ.

Le samedi, il est de $\frac{1058}{1600}$ soit 66 % environ.

Donc ce n'est pas le samedi que la salle était la plus pleine.

54 **1.** Juin. **2.** 22 jours environ.
3. Presque 800 mm.
4. Environ 65 mm en moyenne par mois.
5. Janvier, avril, octobre, novembre et décembre.

55 **1.** $\frac{(6\,727 - 6\,049)}{6\,049} \approx 0{,}112$ soit 11,2 % donc l'augmentation du niveau d'émission de CO_2 entre 1990 à 1998 aux USA a bien été d'environ 11 %.
2. En millions de tonnes : les USA ont connus la plus forte hausse : + 678 millions de tonnes.
En pourcentage : l'Autriche a enregistré la plus forte hausse : + 15 %.

56 La probabilité que le moteur soit Youpi est proche de 0,8.

57 **1.** Musique : 8,8 Go. Photos : 5,4 Go. Espace libre : 1,8 Go.
2. Musique : 8,8 Go (27,5 %). Photos : 5,4 Go (16,9 %). Espace libre : 17,8 Go (55,6 %).
Le dernier graphique est correct.

58 **1.** Le salaire moyen des femmes est :

$$\frac{(1\,200 + 1\,230 + 1\,250 + 1\,310 + 1\,376 + 1\,400 + 1\,440 + 1\,500 + 1\,700 + 2\,100)}{10} = 1450,60$$

Comme le salaire moyen des hommes est de 1 769,00 €, il est supérieur au salaire moyen des femmes.
2. Il y a 10 femmes et 20 hommes dans l'entreprise, soit 30 employés.
On tire au sort une personne dans l'entreprise.
La probabilité que ce soit une femme est donc de $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.
3. Le plus bas salaire de l'entreprise est de 1 000 €. C'est le salaire d'un homme puisque le salaire le plus bas d'une femme est de 1 200 €.
L'étendue du salaire masculin étant de 2 400 €, le salaire le plus élevé d'un homme est donc de 1 000 + 2 400 = 3 400 €. Ce salaire est supérieur au salaire le plus élevé chez les femmes.
3 400 € est donc le salaire le plus élevé dans l'entreprise.
4. Le salaire médian chez les hommes est de 2 000 €. Comme il y a un nombre pair d'hommes et que les salaires des hommes sont tous différents, on peut affirmer que personne (homme ou femme) ne touche ce salaire dans l'entreprise.
Il y a donc 10 hommes qui touchent plus de 2 000 € et, d'après le tableau, une femme. Dans cette entreprise, il y a 11 personnes qui gagnent plus de 2 000 €.

Dans les autres matières

59 **1.** La probabilité qu'un enfant ait les yeux verts si ses deux parents ont les yeux verts est de 75 %.
2. Il y a trois scénarios impossibles :
Un parent avec les yeux bleus et un avec les yeux marrons ont un enfant avec les yeux verts.
Un parent avec les yeux bleus et un avec les yeux verts ont un enfant avec les yeux marrons.
Deux parents avec les yeux bleus ont un enfant avec les yeux marrons.

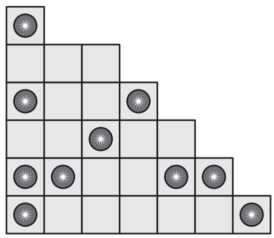
60 **1.** Classement du pH le plus faible au pH le plus élevé :
Coba-Cola : pH = 2,3 ; Free-Cola : pH = 2,31 ; Aroma-Cola : pH = 2,45 ; Briz-Cola : pH = 2,48 ; Sudo-Cola : pH = 2,5 ; Pepsi-mola : pH = 2,6
2. Le pH moyen est de 2,44.

61 La probabilité est de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$.

Jeux mathématiques

62 **1. a.** La probabilité que ce jeton soit un E est de $\frac{15}{102}$ soit environ 0,147.
b. La probabilité que ce jeton soit une voyelle est de $\frac{45}{102}$ soit environ 0,441.
c. La probabilité que ce jeton soit une consonne est de $\frac{55}{102}$ soit environ 0,539.
d. La probabilité que ce jeton soit une lettre de son prénom est de $\frac{35}{102}$ soit environ 0,343.

63



64 12 lettres

Devoirs à la maison

65 Les durées des huit titres enregistrés dans son lecteur sont :
4'24" – 5'37" – 3'12" – 5'23" – 2'18" – 2'37" – 3'39" – 4'23".
1. Il y a 2 chansons sur 8 d'une durée supérieure à 5 minutes. Donc la probabilité que la durée de cette première chanson soit de supérieure à cinq minutes est de $\frac{2}{8}$ soit $\frac{1}{4}$ c'est-à-dire 0,25.
2. $8 \times 7 = 56$. Il y a 56 combinaisons de deux chansons à la suite possible.
Il y a 8 combinaisons de deux chansons donnant une durée inférieure à six minutes :
chanson 3 + chanson 5 (5'30") ; chanson 5 + chanson 3 (5'30") ; chanson 3 + chanson 6 (5'49") ; chanson 6 + chanson 3 (5'49") ; chanson 5 + chanson 6 (4'55") ; chanson 6 + chanson 5 (4'55") ; chanson 5 + chanson 7 (5'57") ; chanson 7 + chanson 5 (5'57").
La probabilité que la durée totale de deux chansons soit inférieure 6 minutes est donc de $\frac{8}{56}$ soit $\frac{1}{7}$ c'est-à-dire environ 0,14.

66 **1.** Parmi les femmes victimes d'infarctus ayant moins de 60 ans, la proportion de non-fumeuses est de 40 %.

2. L'information donnée permet de penser que fumer augmente le risque d'infarctus car il y a plus de fumeuses que de non-fumeuses victimes d'infarctus.

3. On peut calculer rapidement que si 10 femmes sont victimes d'infarctus, 6 sont fumeuses dans un groupe de 22 % de la population et 4 sont non-fumeuses dans un groupe de 78 % de la population.

$\frac{6}{22}$ (0,273) est environ 5 fois plus grand que le quotient $\frac{4}{78}$ (0,513).

Ou plus rigoureusement : si on note i le nombre de cas d'infarctus observés chez les femmes de moins de 60 ans, le nombre d'infarctus parmi les fumeuses est de $0{,}6 \times i$.

En notant n le nombre de femmes de moins de 60 ans, le nombre de fumeuses parmi les personnes de moins de 60 ans est de $0{,}22 \times n$.

Ainsi, la proportion d'infarctus parmi les fumeuses est $q = \frac{0{,}6 \times i}{0{,}22 \times n}$.

De même, le nombre d'infarctus parmi les non-fumeuses est de $0{,}4 \times i$. Le nombre de non-fumeuses parmi les femmes de moins de 60 ans est de $0{,}78 \times n$. Donc l'expression de la proportion q' d'infarctus parmi les non-fumeurs est $q' = \frac{0{,}4 \times i}{0{,}78 \times n}$.

En conclusion :

$$\frac{q}{q'} = \frac{0{,}6 \times i}{0{,}22 \times n} : \frac{0{,}4 \times i}{0{,}78 \times n} = \frac{0{,}6 \times i}{0{,}22 \times n} \times \frac{0{,}78 \times n}{0{,}4 \times i}$$

$$= \frac{0{,}6 \times 0{,}78}{0{,}22 \times 0{,}4} = \frac{0{,}468}{0{,}088} = 5{,}3$$

Donc pour les femmes de moins de 60 ans, une fumeuse a environ 5 fois plus de risques d'avoir un infarctus qu'une non-fumeuse.

■ Avec un logiciel

Activité 1. Jeu de dé

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité utilise le tableur comme outil de simulation permettant de disposer facilement d'un grand nombre d'épreuves. Il apparait ici comme un outil très utile pour résoudre un problème difficilement soluble par les élèves par une modélisation mathématique.

Elle permet de travailler et de développer plusieurs compétences mathématiques :

– organisation de données dans un tableau ;
– simulation ;
– analyse de l'évolution de la fréquence de réalisation d'un événement.

Particularités : Les « compétences tableur » de fin de collège utilisées dans cette activité sont nombreuses et assez techniques (fonctions « alea », fonction « si »).

Leur mise en œuvre peut être facilitée par les fiches méthodes pour un travail éventuellement autonome de l'élève :

– saisir une formule dans une feuille de calcul (fiche tableur 1) ;
– recopier une formule dans une feuille de calcul (fiche tableur 2) ;
– utiliser une fonction dans une feuille de calcul (fiche tableur 6) ;
– construction d'un graphique dans une feuille de calcul (fiche tableur 4).

• Correction

Ici, la fréquence de victoire de Léa tend vers 0,41. La probabilité théorique de gagner pour Léa est de $\frac{15}{36}$ car sur 36 combinaisons des 2 dés. 15 cas donnent Léa avec un score supérieur à son frère.

Activité 2. Bilan salarial

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité permet de travailler et de développer plusieurs compétences mathématiques :

– lecture et organisation de données dans un tableau ;
– tri de données ;
– calcul des caractéristiques d'une série statistique : moyenne, médiane, étendue, quartiles.

Elle permet aussi d'étudier l'influence de la modification de certaines données sur les caractéristiques étudiées.

Elle permet enfin de (re)voir que le tableur est un outil particulièrement adapté aux travaux statistiques, notamment ceux liés aux problèmes monétaires.

Particularités : Les compétences « tableur » de fin de collège utilisées dans cette activité sont nombreuses mais leur mise en œuvre peut être facilitée par les fiches méthodes pour un travail autonome de l'élève :

– saisir une formule dans une feuille de calcul (fiche tableur 1) ;
– trier des données dans une feuille de calcul (fiche tableur 5) ;
– utiliser une fonction dans une feuille de calcul (fiche tableur 6).

Un prolongement possible aux calculs demandés est la construction de graphiques permettant de comparer visuellement les salaires (fiche tableur 4).

• Correction

Un fichier complet est disponible sur le site compagnon.

Activité 3. Marche aléatoire dans toutes les directions

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité utilisant le logiciel Scratch permet de simuler un déplacement aléatoire sur un plan. La programmation de cet algorithme est assez simple et permet à la fois d'utiliser une boucle, une variable et un opérateur aléatoire.

Tâches complexes

1. Trois jeux de hasard

Il vaut mieux choisir le dé bleu.

jeu 1			jeu 2			jeu 3	
score	proba		score	proba		score	proba
4	17%		2	3%			
5	33%		3	6%		3	17%
6	50%		4	14%		4	17%
			5	22%		5	33%
			6	22%		6	17%
			7	22%		7	17%
			8	11%			
Espérance	5,333		Espérance	5,667		Espérance	5,013

2. Les DUDU se disputent la télé

La probabilité que les 3 pièces tombent sur FACE est de $\frac{1}{8}$.

La probabilité que les 3 pièces tombent sur PILE est aussi de $\frac{1}{8}$.

La probabilité que les 3 pièces tombent du même côté est donc de $\frac{1}{4}$. Le jeu n'était pas équilibré.

chapitre 8

Les transformations du plan - Homothéties

I. Le programme

Thème D • Espace et géométrie

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (relations entre angles et parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, caractérisation de la médiatrice, théorèmes de Thales et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en oeuvre d'un raisonnement. Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie.

Attendus de fin de cycle

- Représenter l'espace.
- Utiliser les notions de géométrie plane pour modéliser une situation, pour résoudre un problème.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
■ Mettre en oeuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. ■ Coder une figure. ■ Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.	■ Construire des frises, des pavages, des rosaces. ■ Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie. ■ Faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation.

II. Contexte du chapitre

Au cycle 3, l'élève a commencé à passer d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par l'observation et l'instrumentation à une géométrie dont la validation s'appuie sur le raisonnement et l'argumentation. Les élèves ont appris à comparer la taille de deux objets, et à passer d'un objet à l'autre à l'aide d'un déplacement (avancer, tourner, effet miroir).

En 6^{e}, la notion de symétrie axiale est approfondie. Les élèves apprennent à tracer le symétrique d'une figure par rapport à une droite, et à construire ou compléter une figure à partir de ses axes de symétrie.

Au début du cycle 4, les élèves se sont familiarisés avec la notion de symétrie centrale. Dans ce chapitre, ils ont appris à construire le symétrique d'un point et d'une figure par rapport à un point, et à déterminer le centre de symétrie d'une figure.

En milieu du cycle 4, dans le chapitre Translation-Rotations, les élèves font connaissances avec ces deux nouvelles isométries. Ils vont observer et construire, au moyen de papier ou d'un logiciel, l'image d'un point ou d'une figure par une translation, puis par une rotation.

En fin de cycle, les transformations des années précédentes sont réinvesties, approfondies. Puis une nouvelle transformation géométrique, l'homothétie, est étudiée à travers des activités de description et de construction, pouvant s'appuyer sur papier ou sur logiciel.

Dans la première partie de ce chapitre, on réinvestit les symétries, translations, rotations et on continue l'étude des frises et des pavages : transformations qui conservent les distances.

Dans la deuxième partie, les élèves vont observer l'effet d'une homothétie sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie : transformation qui ne conserve pas les distances. Cette partie, très riche de ce chapitre, met en lien plusieurs notions du programme : théorème de Thalès, proportionnalité, fonctions linéaires, coefficient d'agrandissement ou de réduction. L'élève pourra ainsi travailler la compétence « Représenter » en en mettant en relation des situations (numérique, algébrique, géométrique).

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour le faire point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités Activité 1 : Programme Scratch Activité 2 : Figure dynamique Activité 3 : Figure dynamique
Objectif 1	■ Vidéo « *Je comprends* » : Construire l'image d'une figure par une translation ■ Vidéo « *Je comprends* » : Construire l'image d'une figure par une rotation Exercice 6 : Figure dynamique Exercice 8 : Figure dynamique
Objectif 2	■ Vidéo « *Je comprends* » : Construire l'image d'une figure par une homothétie Exercice 17 : Figure dynamique Exercice 19 : Figure dynamique Exercice 21 : Figure dynamique
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours Exercice 36 : Figure dynamique
Je résous des problèmes	Exercice 39 : Figure dynamique Exercice 41 : Figure dynamique Exercice 55 : Figure dynamique
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 2 : Figure dynamique ■ Activité 3 : Figure dynamique ■ Activité 4 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéos M3C08-TICE1.ggb
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Les DUDU posent des étagères

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Réinvestir la translation dans la construction d'une frise

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Dans cette activité, deux thèmes sont présents : le thème D (espace et géométrie) et le thème E (algorithme et programmation).

Les élèves assimilent, à travers la construction d'une frise, la notion de translation.

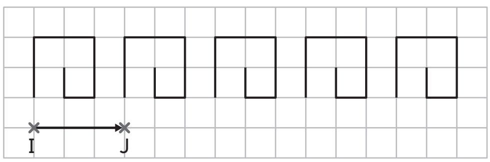
Pour changer de la construction sur papier ou sur un logiciel de géométrie, les élèves vont utiliser Scratch, un logiciel de programmation. Dans le programme, deux blocs vont servir respectivement à reproduire le motif initial puis à se déplacer d'un motif à un autre. La boucle « répéter » va permettre de reproduire un morceau de la frise. Les élèves étudient déjà la partie algorithme avant de se lancer dans la programmation.

Dans la dernière partie, on demande aux élèves de changer des paramètres du programme afin de modifier la forme de la frise.

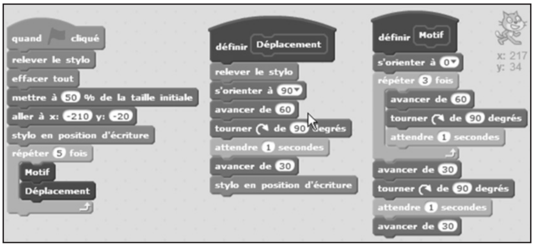
Les questions de 1 à 4 se traitent sur feuille. Une mise en commun est conseillée avant de passer à la partie programmation. Les questions 5 à 7 se traitent sur un poste informatique.

• *Correction*

1.



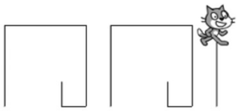
2. On construit l'image du motif initial par la translation qui transforme le point I en J.
3. Le bloc 1 convient.
4. a. Le lutin lève le crayon, avance horizontalement, pivote, redescend pour être sur le point de départ d'un nouveau motif.
b. Le bloc 3 convient.
5. Programmer avec Scratch le tracé de la frise.
– Zone script du lutin chat :



– Zone exécution après avoir cliqué sur le drapeau vert :

6. Pour obtenir une frise aux motifs plus espacés, on doit modifier dans le bloc « Déplacement » le premier déplacement « avancer de 60 » par un nombre plus grand :

7. Pour obtenir une frise aux motifs plus hauts, on doit modifier dans le bloc « Motif » le premier déplacement « avancer de 60 » par un nombre plus grand :



Activité 2. Réinvestir la symétrie axiale et la rotation en construisant une rosace

• *Considérations didactiques et mise en pratique*
Les œuvres d'art s'avèrent être en effet un excellent moyen d'entrer dans le monde mathématique.
La rosace est une figure composée de courbes et contre-courbes, construites à partir d'un point central, et inscrites dans un cercle. Utilisée dans l'architecture, le décor, la broderie, le design, les sciences, adopté comme symbole socio-ethno-culturel, ce motif traverse les siècles, les sociétés, les religions et les continents.
Observation, reconnaissance, manipulation, appropriation, création... toutes les ouvertures de l'activité mènent à la construction d'une rosace et une consolidation des deux transformations : symétrie axiale et rotation. Après avoir construit le motif initial, les élèves appliquent un enchaînement d'instructions pour construire une rosace à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
L'activité peut se faire sur tablette mais de préférence sur un ordinateur.
Les élèves peuvent avoir des difficultés pour construire le symétrique d'un ensemble. Il peut être judicieux de montrer à la classe, en amont, un exemple au vidéo-projecteur.
L'activité dévoile la figure finale : cela peut donner des pistes aux élèves qui hésiteraient sur une manipulation.

Activité 3. Transformer un objet par homothétie

• *Considérations didactiques et mise en pratique*
Les élèves découvrent ici l'effet d'une nouvelle transformation : l'homothétie, en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.

L'objectif de cette activité est double : construire une figure initiale et son image par une homothétie de centre et de rapport donnés, puis observer la taille de la figure initiale et de la figure finale en fonction du rapport homothétique. Les élèves devront expérimenter cette nouvelle transformation sur ordinateur. Il est important de vérifier qu'ils aient tous construits correctement la figure et le curseur ***k*** (questions 1 à 3) afin qu'ils puissent aborder le problème d'agrandissement-réduction de la question 4. Une synthèse orale puis écrite terminera l'activité.

• Correction

1. à 3. Construire le cornet de glace et son image par l'homothétie de centre F et de facteur allant de 0 à 4.

4. a. Lorsque $k > 1$, la figure 2 est un agrandissement de la figure 1.

b. Lorsque $0 < k < 1$, la figure 2 est une réduction de la figure 1.

c. Lorsque $k = 1$, la figure 1 et la figure 2 sont superposées.

■ Objectif 1. Transformer un point ou une figure par symétries, translation, rotation

Je m'entraine

1 **a.** Faux, le déplacement se fait d'un point à un autre.

b. Vrai.

c. Faux, le centre n'appartient pas toujours à la figure.

2 **a.** La figure 2 est l'image de la figure 1 par la symétrie axiale d'axe (d_1).

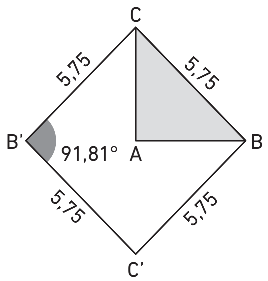
b. La figure 3 est l'image de la figure 2 par la symétrie axiale d'axe (d_2).

c. La figure 3 est l'image de la figure 1 par la symétrie centrale de centre 0.

3 **1.** Empreinte c.

2. Les deux empreintes seraient symétriques par rapport à un point.

4 **1. et 2.**



3. Le quadrilatère BCB'C' est un losange.

Je résous des problèmes simples

5 **1.** L'image du point A par la rotation de centre B et d'angle 90° dans le sens ↻ est le point C.

2. L'image du triangle AIO par la rotation de centre I et d'angle 90° dans le sens ↻ est le triangle OIB.

3. L'image du point A par la symétrie axiale d'axe (IO) est le point B.

4. L'image du triangle AOD par la symétrie axiale d'axe (IO) est le triangle BOC.

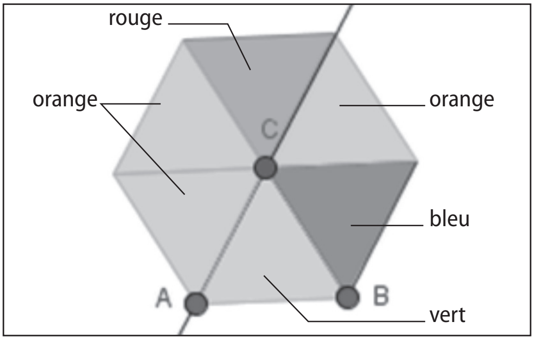
5. L'image du point B par la symétrie centrale de centre O est le point D.

6. L'image du triangle AOB par la symétrie centrale de centre O est le triangle COD.

7. L'image du point A par la translation qui transforme le point B en C est le point D.

8. L'image du point I par la translation qui transforme le point A en I est le point B.

6 Construction finale :



1. Triangle vert.

2. Triangle bleu.

3. Triangle rouge.

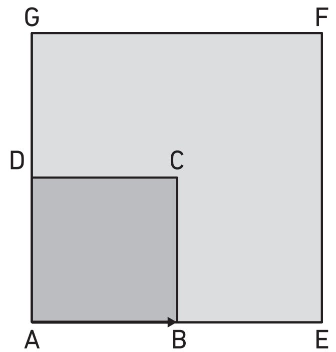
4. Triangles orange.

5. On obtient au final un hexagone (polygone régulier à 6 côtés).

7 **1.** Le drapeau c.

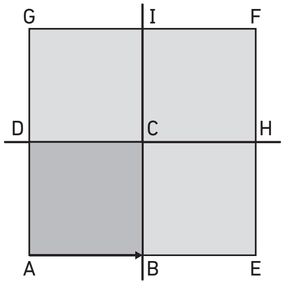
2. Une symétrie axiale permet de passer d'un drapeau à l'autre.

8 **1.**



2. AEFG est un carré dont le côté mesure le double du côté du carré ABCD.

3. a.



b. H est le milieu de [EF] et I est le milieu de [GF].
c. Il y a 5 carrés dans AEFG.

9 **a.** Translation.
b. Symétrie axiale.
c. Translation.

10 **1.** Vrai.
2. Faux.
3. Faux.
4. Vrai.

11 Image 1 : Symétrie axiale.
Image 2 : Rotation.
Image 3 : Translation.

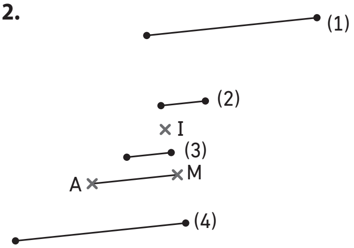
■ Objectif 2. Transformer un point ou une figure par homothétie

Je m'entraîne

12 **a.** Non, une homothétie ne conserve pas les longueurs.
b. Lorsque $k = -1$.
c. Lorsque $k > 1$.

13 L'homothétie est une transformation géométrique qui consiste à **agrandir** ou à **réduire** une figure selon un **centre** et un **rapport** d'homothétie.
La figure image obtenue par homothétie conserve les **mesures d'angles** mais pas les **longueurs**.

14 **1. et 2.**



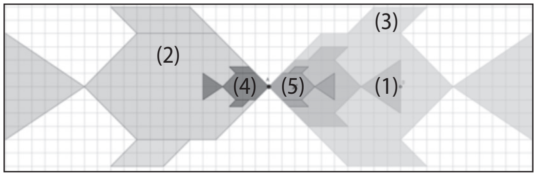
a. Segment bleu (4)
b. Segment violet (3)
c. Segment rouge (1)
d. Segment orange (2)

15 **a.** $0 < k < 1$ pour la lettre A.
b. $k > 1$ pour la lettre E.

Je résous des problèmes simples

16 **a.** $IA = 0{,}75 \times IB$
b. $RP = 5 \times RM$

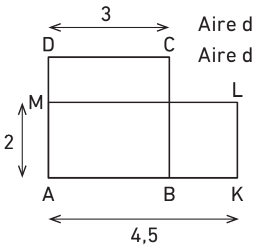
17 **1. à 5.** Les images du poisson vert (1) par une homothétie de centre A :



6. Les poissons rouge (2) et rose (3) sont de même taille. Les poissons noirs et gris sont de même taille.

18 **1.** Homothétie de centre O et de rapport $k > 0$.
2. $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$
3. k représente le coefficient d'agrandissement de ABC.

19 **1.**

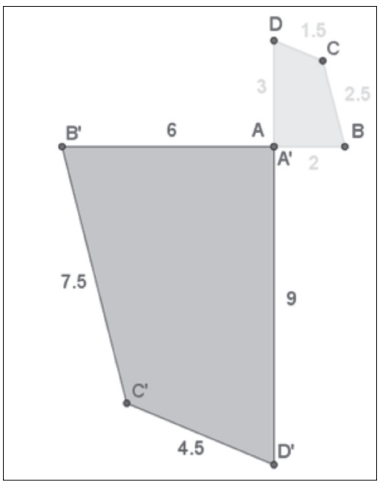


Aire de AKLM = 9
Aire de ABCD = 9

2. L'aire du carré ABCD est égale à l'aire du rectangle AKLM.
Cas général $a > 0$
Aire de ABCD : a^2
Aire de AKLM : $\frac{2}{3}a \times \frac{3}{2}a = a^2$

20 Un négatif 24×36 mm est homothétique à un tirage 10×15 cm ou encore 24×36 cm.

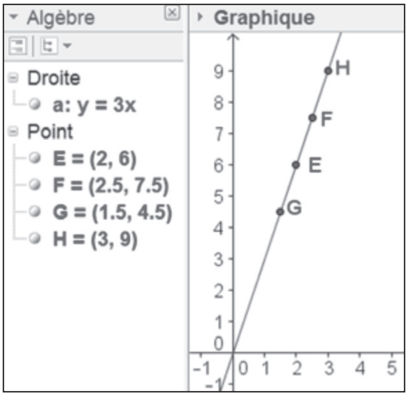
21 **1. et 2.**



3.

Longueurs ABCD	AB = 2	BC = 2,5	CD = 1,5	AD = 3
Longueurs A′B′C′D′	A′B′ = 6	B′C′ = 7,5	C′D′ = 4,5	A′D′ = 9

4. a. et **b.** Les points sont alignés.



5. Oui, il y a proportionnalité des longueurs.

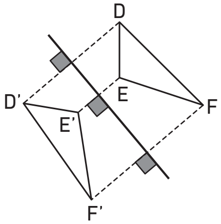
22 **1.** Vrai.
2. Faux.
3. Vrai.

Je travaille seul(e)

23 B **24** A **25** B **26** B **27** A

28 **a.** Une symétrie axiale d'axe verticale.
b. Une translation.
c. Une rotation d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

29 **1.** On reconnait une symétrie axiale.
2.



30 La figure image est l'image de la figure initiale par la translation qui transforme le point A en A′, ou D en D′.

31 Le motif de base est un T. Pour construire le pavé, on trace le symétrique d'un motif initial par trois rotations de centre le coin du T et d'angle 90°, 180°, 270°.

32 **a.** Tracer l'image du chiffre 4 par la symétrie axiale verticale.

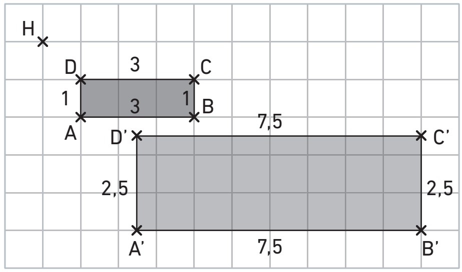
b. Tracer l'image du chiffre 4 par la symétrie centrale de centre le « milieu » du chiffre 4.

33 Le point D est l'image du point B par la translation qui transforme A en E.

34 Homothétie de centre I et de rapport 2 : image 1.
Homothétie de centre I et de rapport −3 : image 4.
Homothétie de centre I et de rapport 0,5 : image 2.
Homothétie de centre I et de rapport −0,5 : image 3.

35 **1.** Transformation utilisée : homothétie.
2. Caractéristiques : la figure rouge est l'image de la figure verte par l'homothétie de centre O et de rapport $k > 0$.

36 **1.**



2.

Longueurs du rectangle ABCD	AB = 3	BC = 1	CD = 3	AD = 1
Longueurs du rectangle A′B′C′D′	A′B′ = 7,5	B′C′ = 2,5	C′D′ = 7,5	A′D′ = 2,5

3. a. Oui, la ligne 1 est proportionnelle à la ligne 2.
b. Le coefficient de proportionnalité vaut 2,5. Il correspond au rapport de l'homothétie.

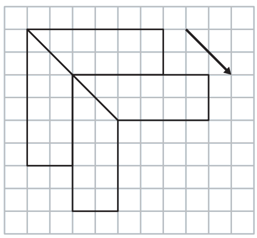
37 Rapport d'agrandissement des deux triangles homothétiques : $\frac{12}{6} = 2$ (car les longueurs de la figure image mesurent le double des longueurs de la figure initiale).

38 Rapport de réduction des deux triangles :

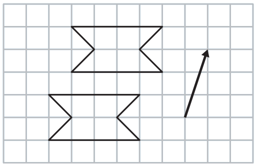
$$\frac{2,5}{5} = \frac{4}{8} = \frac{1,75}{3,5} = 0,5$$

Je résous des problèmes

39 **a.** Figure initiale et finale obtenue par translation :

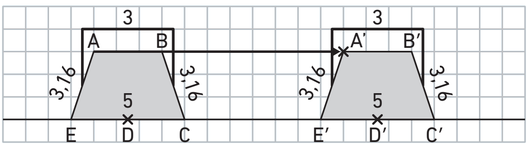


b. Figure initiale et finale obtenue par translation :



40 **a.** Le triangle A′B′C′ est l'image du triangle ABC par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
b. Le triangle A′B′C′ est l'image du triangle ABC par la symétrie axiale d'axe la droite (d).
c. Le carré A′B′C′D′ est l'image du carré ABCD par la symétrie centrale de centre O.
d. Le triangle A′B′C′ est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme I en J.

41 **1.**

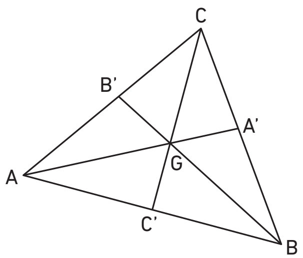


Aire de ECBA = 12 Aire de E′C′B′A′ = 12

2. Les longueurs du trapèze ABCD sont proportionnelles aux longueurs du trapèze A′B′C′E′.
3. Les deux trapèzes ont la même aire.

42 Figure 1 : Les points M et N sont les images des points L et P par l'homothétie de centre K et de rapport 2.
Figure 2 : Les points M et N sont les images des points T et S par l'homothétie de centre U et de rapport $\frac{-3}{8} = -0{,}375$.
Figure 3 : Les points M et N sont les images des points B et C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{-12}{7{,}5} = -1{,}6$.

43 Construction du triangle ABC et des milieux de ses côtés.



2. a. Les 3 segments (les 3 médianes) sont concourants en un même point.
b. G est le point d'intersection des médianes.
3. a. GB = 2GB′
b. BA = 2GA′ et GC = 2GC′
4. a. L'homothétie de centre G et de rapport −0,5 permet de passer de A à A′, de B à B′, de C à C′.
b. Cette homothétie ne permet pas de passer de ABC à A′B′C′. Il faut rajouter une rotation.

44 Un groupe A fait deviner le tapis au groupe B à l'aide d'indications sur les transformations à appliquer sur le motif initial.

Le groupe B doit réaliser le tapis décrit par la figure A, en complétant la figure initiale.

45 Étape 1 : D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC : BC = 500 m.

Étape 2 : Égalités obtenues à partir des homothéties : CD = 2,5CB ; CE = 2,5CA et ED = 2,5AB.

Étape 3 : En déduire que CD = 1 250 m et DE = 750 m.

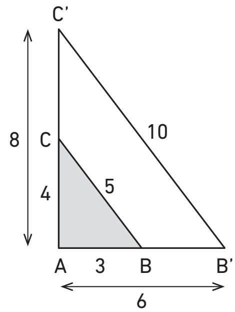
Étape 4 : Conclure. Finalement, la longueur réelle du parcours est de 2 500 m.

46 **1.** L'homothétie représente un agrandissement car $k = 2{,}5 > 1$.

2. A′R′ = 2,5AR = 7,5 ; R′T′ = 2,5RT = 15 et A′T′ = 2,55AT = 12,5.

3. Les deux triangles sont semblables car les côtés homologues sont proportionnels.

47 **1.** ABC et AB′C′ sont un exemple de triangles homothétiques car leurs longueurs sont proportionnelles.



2. Ce sont des triangles semblables.

48 Les points A, C, E, G sont les images des points B, D, F, H par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1{,}62}{324} = 0{,}005$.

Donc DH = $\frac{58}{0{,}005}$ = 11 600 cm = 116 m et

EG = 0,005.5763 = 28,815 cm.

49 **1.** Construire les images du triangle KHG par les trois rotations de centre K et d'angle 90°, 180° et 270° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

2. Construire l'image du carré EFGH par la symétrie axiale d'axe (AC). Puis construire l'image de FEG par la rotation de centre F et d'angle 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On obtient FCG. Puis tracer l'image de EFH par la rotation de centre E et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. On obtient EAH.

Pour obtenir HGB, DH′G′, CFG′ et AEH′, utiliser la symétrie d'axe (AC).

Dans les autres matières

50 **1.**

	Drapeau 1	Drapeau 2	Drapeau 3	Drapeau 4
Nom du pays	Allemagne	Autriche	République Tchèque	Royaume-Uni
Axes de symétrie	2	2	1	2
Centre de symétrie		Intersection des diagonales		Intersection des diagonales

2. Le drapeau européen a 12 axes de symétrie (6 axes qui passent sur les étoiles et 6 axes qui passent entre les étoiles) et son centre de symétrie est le centre du cercle ou sont dessinées les étoiles.

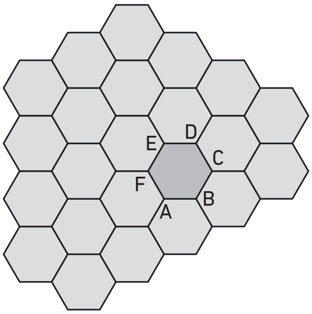
51 **1.** Rotation de centre A et d'angle 180°.
2. IHG
3. Translation qui transforme B en A.

Jeux mathématiques

52 **1.** Symétrie axiale.

2. 6 erreurs à découvrir.

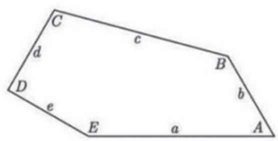
53 Pavage des abeilles réalisé à partir de symétrie axiale.



54 **1.** On passe de A à C par une symétrie centrale de centre O.
On passe de C à D par la symétrie centrale de centre O′.
2. a. On peut passer de A à D par la translation qui transforme deux fois la longueur de O à O′.
b. C'est l'écureuil H.

Devoirs à la maison

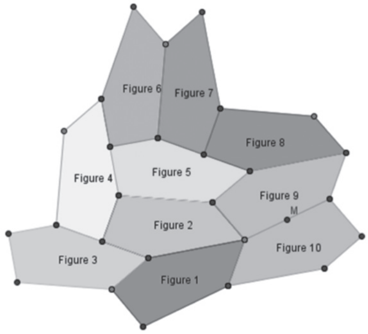
55 **1.**



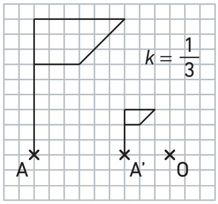
$A = 60°$ $a = 1$
$B = 135°$ $b = 1/2$
$C = 105°$ $c = \dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$
$D = 90°$ $d = 1/2$
$E = 150°$ $e = 1/2$

Le nouveau pentagone.

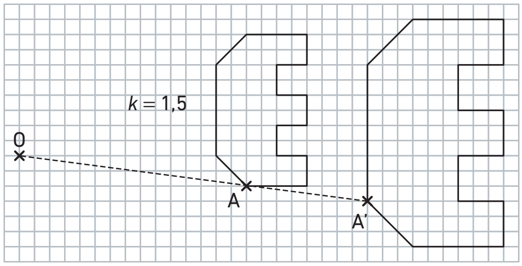
2.



56 **a.** Homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$:



b. Homothétie de centre O et de rapport 1,5 :



Avec un logiciel

Activité 1. Homothétie et aire

• Considérations didactiques et mise en pratique

Dans ce TP, les élèves vont étudier une figure objet et son image par une transformation géométrique du plan : l'homothétie.

Les objectifs d'apprentissage pour les élèves sont les suivants :
– construire un cercle et son image par une homothétie de rapport 2, puis de rapport 3 à l'aide d'un logiciel de géométrie (question1) ;
– repérer les propriétés de cette transformation, liées aux aires, en utilisant un tableur (questions 2 à 4).

L'élève devra, dans la question 4, conjecturer que les homothéties de rapport k multiplient les aires par k^2 (dans le cas particulier du cercle).

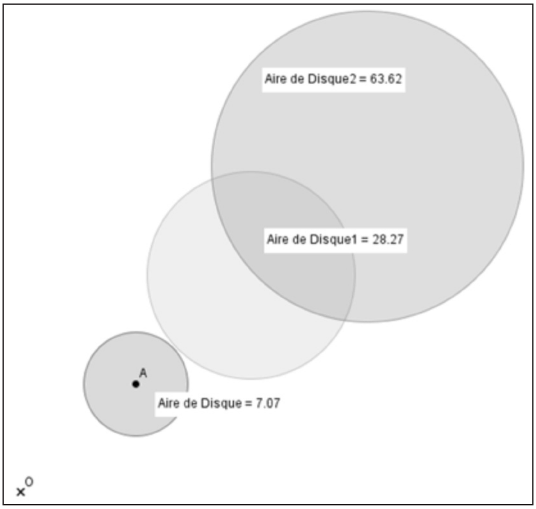
En prolongement, on pourra proposer de construire un autre objet mathématique (carré, triangle…) et de vérifier que cette propriété reste toujours valable.

Les élèves pourront travailler en binôme sur ordinateur.

Vérifier que les étapes de constructions sont vérifiées et bien respectées pour ne pas mettre en erreur la conjecture sur les aires. L'utilisation en parallèle du tableur, et de la fenêtre graphique n'est pas très fréquente : les élèves auront surement besoin d'aide pour la manipulation (prévoir un vidéo-projecteur pour montrer à la classe les manipulations).

• *Correction*

1. Suivre les étapes de construction pour tracer les trois cercles et afficher leur aire.



2. Dans la partie tableur, afficher les volumes dans la colonne B et les rapports de volume dans la colonne C.

Dans la partie tableur, afficher les aires dans la colonne B et les rapports des aires dans la colonne C.

	A	B	C
1	Nom	Aire	Rapport
2	Disque	7.07	1
3	Disque 1	28.27	4
4	Disque 2	63.62	9

3. On constate que Aire1 = k^2*Aire et Aire2 = k^2*Aire.

4. Une homothétie de rapport k (avec $k > 1$) modifie les aires par k^2.

Activité 2. Homothétie et volume

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Dans une première partie de ce TP, les élèves ont à exécuter des tâches de construction de transformer des figures à l'aide d'un logiciel de géométrie 3D.

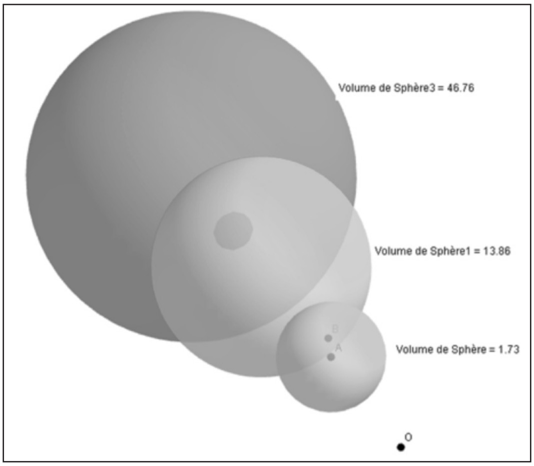
Puis dans une seconde partie, les élèves vont analyser le lien entre le volume de la sphère initiale et le volume de la sphère image, en utilisant le tableur du logiciel (questions 2 et 3). L'élève devra, dans la question 4, conjecturer que les homothéties de rapport k multiplient les volumes par k^3 (dans le cas particulier d'une sphère).

En prolongement, on pourra proposer de construire un autre objet mathématique (cube, pyramide…) et de vérifier que cette propriété reste toujours valable.

Les élèves pourront travailler en binôme sur ordinateur. Vérifier que les étapes de constructions sont vérifiées et bien respectées pour ne pas mettre en erreur la conjecture sur les volumes. L'utilisation en parallèle du tableur, et de la fenêtre graphique 3D n'est pas très fréquente : les élèves auront surement besoin d'aide pour la manipulation (prévoir un vidéo-projecteur pour montrer à la classe les manipulations).

• *Correction*

1. Suivre les étapes de constructions des trois sphères et afficher leur volume.



2. Dans la partie tableur, afficher les volumes dans la colonne B et les rapports de volume dans la colonne C.

	A	B	C
1	Nom	Volume	Rapport
2	Sphère	1.73	1
3	Sphère 1	13.86	8
4	Sphère 2	46.76	27

3. Si l'on modifie la position du point B, les valeurs de la colonne B changent mais pas les valeurs de la colonne C.

4. Une homothétie de rapport k (avec $k > 1$) modifie les volumes par k^3.

Activité 3. Zoom sur le Yin et le Yang

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Quelle est la forme exacte de la courbe qui sépare le Yin du Yang ? Les élèves dans ce TP vont dans un premier temps représenter cette figure célèbre : le Taijitu qui symbolise la dualité et la complémentarité du Yin et du Yang.

Art et mathématiques vont s'entrecroiser : les élèves vont approfondir la notion de rotation, et vont utiliser l'outil curseur du logiciel de géométrie afin d'obtenir un Yin et Yang artistique !

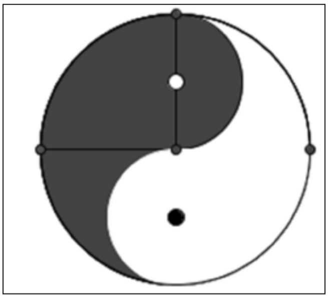
Il est important de respecter l'ordre des instructions pour en pas obtenir une figure erronée.

Dans des précédents travaux, on a vu que la rotation est une isométrie du plan qui conserve les distances. Elle conserve l'alignement des points, les longueurs, les angles et les aires. Dans la dernière question du TP, les élèves conjecturent une nouvelle propriété : la rotation admet toujours son centre comme point invariant.

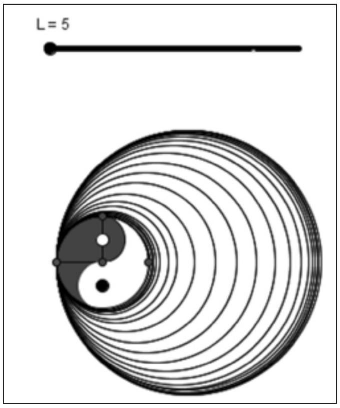
Les élèves peuvent travailler en binôme par groupe de 2 ou 3, sur un ordinateur, et utiliser la fenêtre graphique d'un logiciel de géométrie. L'objectif est d'arriver à la figure finale et de conclure par le point invariant.

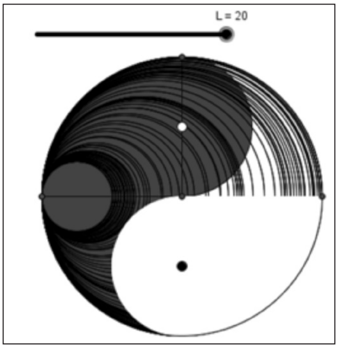
• *Correction*

1. et 2. Suivre les étapes de construction du Yin et du Yang.



3. a. Faire varier le curseur L.





b. Lorsque L varie, on obtient des agrandissements du Yin et du Yang : les homothéties de la figure initiale de centre A et de rapport L/5.

c. Le point A(0 ; 0) ne dépend pas de L et ne bouge jamais.

Activité 4. Une série homothétique de matriochkas

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Le terme homothétie traduit la correspondance entre deux figures de même forme et de même orientation. L'homothétie correspond à un changement d'échelle des figures. Ainsi, deux poupées russes regardant dans la même direction peuvent être vues comme homothétiques.

Dans cet esprit, l'attente de ce TP est bien clarifiée : écrire un programme qui affiche cinq poupées russes, de taille homothétiquement décroissante avec le chat de Scratch.

L'objectif principal est donc de visualiser concrètement l'effet d'une homothétie. En parallèle, ce TP favorise l'apprentissage de la programmation. Peu d'indications sont dévoilées laissant un peu d'autonomie aux élèves et l'appropriation des différents outils de Scratch.

Le point de départ est donné aux élèves : fixer la position initiale du lutin et utiliser l'outil « estampiller » dans le menu Stylo, dont le but est d'imprimer et de reproduire l'image du lutin chat sur la scène.

Puis ils doivent emboîter une palette de blocs pour finaliser le script. Pour les élèves les plus en difficultés et qui manquent de prise d'initiative, on peut leur proposer de créer deux variables : « taille » (qui va réduire 4 fois la taille du chat) et « réduction » qui correspond au coefficient de réduction d'un chat à un autre et d'un boucle « répéter 4 fois ».

Le plus délicat est le déplacement d'une figure à la suivante. La position initiale du chat est $x = -150$, $y = -80$.

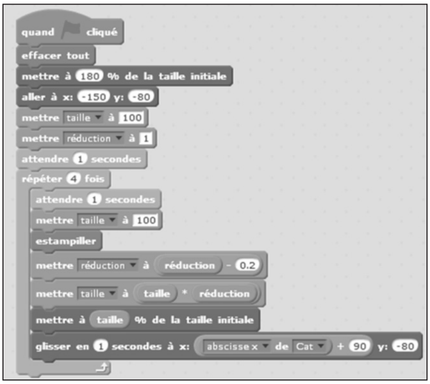
On suppose qu'il se déplace horizontalement, et qu'il doit arriver à la position $x = 210$ et $y = -80$. Il faut donc que le chat se déplace de 360 pas en 4 fois, soit de 90 pas entre chaque copie. D'où l'instruction :

dans la boucle.

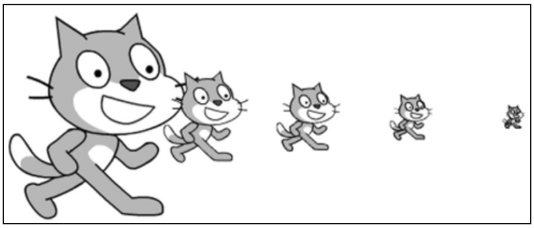
Ce mini-projet peut être réalisé en groupe de 2 à 4 élèves. Il est intéressant de comprendre en amont les étapes à construire sur papier (faire de l'algorithmique débranché), les besoins pour réaliser ces étapes, avant de se lancer dans la programmation.

• *Correction*

Correction du script complet du lutin « cat » :



Capture d'écran des 5 chats homothétiques :



■ Tâches complexes

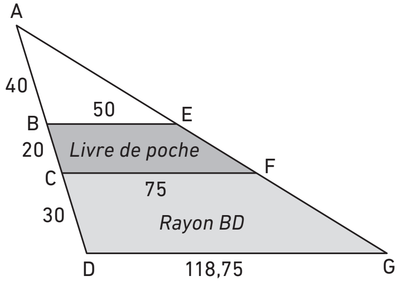
1. La mini-tour de Pise

Coefficient de réduction : $k = \frac{26}{5\,580} \approx 0{,}00466\,\text{cm}$.

$AC = 2 \times \frac{5\,580}{26} \approx 429{,}231\,\text{cm}$

D'où $BC \approx 427{,}23$ m.

2. Les Dudu posent des étagères



Les triangles ABE, ACF et ADG sont homothétiques.

Donc on a l'égalité de rapport de longueur :

$\frac{AB}{AD} = \frac{EB}{DG}$

$\frac{40}{95} = \frac{50}{DG}$

Soit $DG = 118{,}75$ cm $<$ 130 cm.

Donc la planche de la dernière étagère n'est pas trop courte.

chapitre 9

Le théorème de Thalès

I. Le programme

Thème D – Espace et géométrie

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (relations entre angles et parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, caractérisation de la médiatrice, théorèmes de Thalès et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en œuvre d'un raisonnement. Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie.

Attendu de fin de cycle

- Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
■ Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture. – Position relative de deux droites dans le plan. – Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes / internes. – Médiatrice d'un segment. – Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables, hauteurs, rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente). – Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales. ■ **Théorème de Thalès et réciproque.** – Théorème de Pythagore et réciproque.	■ Distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure. ■ Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité. – Utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles. – Démontrer, par exemple, que des droites sont parallèles ou perpendiculaires, qu'un point est le milieu d'un segment, qu'une droite est la médiatrice d'un segment, qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré. – Étudier comment les notions de la géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Eratosthène, distance de la Terre à la Lune par Lalande et La Caille, etc.).

** En **gras** : ce qui est étudié dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

Une fois ces notions consolidées, les homothéties sont étudiées en 3^{e}, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	Fichiers texte modifiable des activités ■ Activité 1 : figure dynamique ■ Activité 2 : figure dynamique
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Appliquer le théorème de Thalès (1) ■ Vidéo « *Je comprends* » : Appliquer le théorème de Thalès (2) ■ Vidéo « *Je comprends* » : Appliquer la réciproque du théorème de Thalès ■ Vidéo « *Je comprends* » : Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Figure dynamique ■ Activité 2 : Figure dynamique ■ Activité 3 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Le clocher

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Calculer une longueur avec le théorème de Thalès dans un triangle

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Les variables (longueurs) de la feuille de géométrie dynamique sont directement exploitables dans la fenêtre du tableur. L'avantage est d'avoir à disposition un outil de calcul performant, intuitif et très simple à utiliser.
Après avoir réalisé la figure dynamique, on complète la feuille de calcul par un tableau présentant les côtés respectifs des deux triangles. Le parallélisme de (BC) et (B′C′) permet de conjecturer que le tableau semble traduire une situation de proportionnalité.
Il est important d'insister sur le fait que les côtés des deux triangles sont deux à deux proportionnels. À ce niveau, il est peut être trop tôt pour formaliser la propriété de Thalès. Il serait prudent d'entraîner auparavant les élèves à découvrir d'autres situations de proportionnalité des longueurs des côtés dans un triangle.

• *Correction*

2. Les droites (B′C′) et (BC) semblent parallèles.
3. Le tableau est un tableau de proportionnalité.
4. Les côtés du triangle ABC sont proportionnels aux côtés du triangle AB′C′.

Activité 2. Calculer une longueur avec le théorème de Thalès

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Les variables (longueurs) de la feuille de géométrie dynamique sont directement exploitables dans la fenêtre du tableur. L'avantage est d'avoir à disposition un outil de calcul performant, intuitif et très simple à utiliser.
Après avoir réalisé la figure dynamique, on complète la feuille de calcul par un tableau présentant les côtés respectifs des deux triangles. Le parallélisme des droites (BC) et (B′C′) permet de conjecturer que le tableau semble traduire une situation de proportionnalité.
Il est important d'insister sur le fait que les côtés des deux triangles sont deux à deux proportionnels.
Cette activité peut être réalisée avec la version 3.0 (ou supérieure) de GeoGebra qui intègre un tableur. Il est préférable que les élèves ne soient pas novices dans l'utilisation d'un tableur. La construction de la figure reste relativement aisée.

• *Correction*

2. et **3.** Résultats analogues à ceux de l'activité 1.
4. Par symétrie, on se ramène à la situation de l'activité 1.

Activité 3. Démontrer que deux droites sont ou ne sont pas parallèles

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Partant d'une situation concrète, l'activité a pour objectif d'appliquer le théorème de Thalès dans sa contraposée pour prouver que deux droites ne sont pas parallèles.
La formalisation de la contraposée ne doit pas se faire comme telle. On pourra se contenter de rendre les élèves sensibles au fait que l'égalité des rapports est une condition nécessaire au parallélisme. Sa négation rend donc le parallélisme impossible.
On pourra alors éventuellement formaliser une propriété nouvelle sans nécessairement lui accorder le statut de contraposée.
Dans la partie 2, l'objectif est d'appliquer la réciproque du théorème de Thalès pour démontrer que deux droites sont parallèles.

Il est important de bien distinguer le contexte d'application de la propriété : dans la situation de l'activité, toutes les longueurs des triangles sont connues, il ne s'agit donc pas de calculer une longueur manquante. La confusion avec le théorème direct est encore bien présente chez beaucoup d'élèves. L'activité permet également de débattre sur les conditions d'utilisation de la réciproque.

• ***Correction***

1. Les quotients ne sont pas égaux, la table n'est pas parallèle au sol.

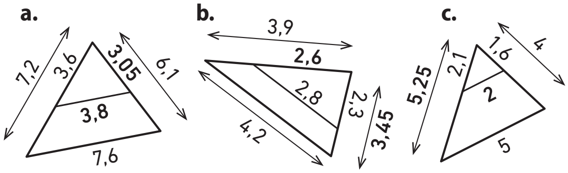
2. En coupant 1 cm à un pied, les quotients deviennent égaux. Dans ce cas, la table est parallèle au sol.

■ Objectif 1. Calculer une longueur avec le théorème de Thalès dans un triangle

Je m'entraine

1

a. **b.** **c.**



2

Figure	Triangles proportionnels	Droites parallèles	Égalité de rapports
1	PR'S' et PRS	(S'R') et (SR)	$\frac{PS'}{PS} = \frac{PR'}{PR} = \frac{S'R'}{SR}$
2	GFH et GEI	(FH) et (EI)	$\frac{GF}{GE} = \frac{GH}{GI} = \frac{FH}{EI}$
3	KNT et KPS	(NT) et (PS)	$\frac{KN}{KP} = \frac{KT}{KS} = \frac{NT}{PS}$
	KTL et KSM	(TL) et (SM)	$\frac{KT}{KS} = \frac{KL}{KM} = \frac{TL}{SM}$

3 **a.** $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$

b. $\frac{PA}{PM} = \frac{PB}{PN} = \frac{AB}{MN}$

4 BD = 6 cm et AC = 7,5 cm.

5 AB = 7 cm et AC = 8,4 cm.

Je résous des problèmes simples

6 PM = 7 cm et AM = 2,5 cm.

7 EF = 3,5 cm.

8 Éva n'a pas écrit les bons rapports de longueur.
Il fallait écrire $\frac{DK}{DE} = \frac{DL}{DF} = \frac{KL}{EF}$.

9 EA = $\frac{7}{3}$ cm

10 **1.** Les droites (KH) et (BC) sont perpendiculaires à une même troisième droite (AB), donc elles sont parallèles.

2. AB = $\frac{28}{3}$ cm

11 La hauteur BS de la falaise est égale à 99,4 m.

12 QP = 18,9 cm et RB = 7 cm

■ Objectif 2. Calculer une longueur avec le théorème de Thalès

Je m'entraine

13 **a.** 4,5 et 6 **b.** 9 et 3,1 **c.** 3,6 et 4

14

Triangles considérés	Droites parallèles	Égalité de rapports
ABC et BDE	(AC) et (DE)	$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}$
BFG et BDE	(FG) et (DE)	$\frac{BG}{BD} = \frac{BF}{BE} = \frac{GF}{DE}$
ABC et BFG	(FG) et (AC)	$\frac{BC}{BF} = \frac{BA}{BG} = \frac{CA}{FG}$

15 BD = $7 \times 5 : 6 = \frac{35}{6}$ cm.
AC = $6 \times 6 : 5 = 7{,}2$ cm.

16 MA = $6 \times 4 : 6 = 4$ cm
MP = $3{,}5 \times 6 : 4 = 5{,}25$ cm

17 KR = $2{,}4 \times 8 : 2{,}7 = \frac{64}{9}$

Je résous des problèmes simples

18 La double égalité des rapports de longueurs est fausse.
Il fallait écrire $\frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN} = \frac{AB}{MN}$.

19 **1.** On applique le théorème de Pythagore : ED = 4,8 cm.

2. Les droites (BC) et (DE) sont parallèles car perpendiculaires à une même troisième (EC).

3. BC = $3 \times 4{,}8 : 5{,}5 \approx 2{,}6$ cm

20 La longueur de l'assise est égale à $40 \times 30 : 35 \approx 34{,}3$ cm.

21 **1.** AC = $6{,}4 \times 3 : 6 = 3{,}2$ cm **2.** GF = $4{,}5 \times 3 : 5 = 2{,}7$ cm

22 **1.** AD = 10 cm et AE = 8 cm **2.** DE = 9 cm

23 **1.** AR = 3 cm **2.** RS = 3,5 cm

24 RB ≈ 5,1 cm et QP ≈ 6,3 cm

■ Objectif 3. Démontrer que deux droites sont ou ne sont pas parallèles

Je m'entraine

25 **a.** Oui **b.** Oui
c. Non **d.** Oui
e. Oui **f.** Non

26 $\frac{PB}{PC} = \frac{2}{3}$ et $\frac{PA}{PD} = \frac{2,6}{3,9} = \frac{2}{3}$

27 $\frac{PA}{PD} = \frac{4}{5}$ et $\frac{PB}{PC} = \frac{3}{3,75} = \frac{4}{5}$

28 $\frac{AF}{AD} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AE}{AC} = \frac{4,2}{6,3} = \frac{2}{3}$

29 $\frac{MD}{ME} = \frac{4,5}{7,3} = \frac{45}{73}$ et $\frac{AE}{AC} = \frac{3,5}{5,5} = \frac{7}{11}$

Je résous des problèmes simples

30 Il ne doit pas affirmer dès le début de la démonstration qu'il applique la réciproque du théorème de Thalès. Les rapports de longueurs ne sont pas égaux.

31 $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5}$ et $\frac{AE}{AC} = \frac{2,4}{3,1} = \frac{24}{31}$.
Les droites (BC) et (DE) ne sont donc pas parallèles.
Comme (AB) et (BC) sont perpendiculaires, on en déduit que (AB) et (DE) ne le sont pas.
L'étagère n'est donc pas perpendiculaire au mur.

32 **1.** $\frac{CB}{CD} = \frac{7}{11}$ et $\frac{CA}{CE} = \frac{7,7}{12,1} = \frac{7}{11}$
2. Si deux droites sont parallèles, ici (AB) et (DE), alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. (BD) étant perpendiculaire à (AB) est donc perpendiculaire à (DE).
3. On prouve à l'aide du théorème de Pythagore que DE $\approx$ 5 cm et AB $\approx$ 3,2 cm.

33 En reliant deux à deux les points respectifs des deux graduations, on obtient des rapports de longueurs égaux. D'après le théorème de Thalès, les droites correspondantes sont parallèles.

34 $\frac{AR}{AD} = \frac{5,5}{8}$ et $\frac{AP}{AE} = \frac{5,5}{6,05}$

35 $\frac{AB}{AD} = \frac{2,8}{4} = \frac{7}{10}$ et $\frac{AC}{AE} = \frac{3,5}{5} = \frac{7}{10}$

■ Je travaille seul(e)

36 C **37** C **38** B **39** A **40** B

41 $\frac{FS}{FD} = \frac{FR}{FE} = \frac{SR}{DE}$
FS = 5,5 × 5 : 6 ≈ 4,6 cm
SR = 5 × 4 : 6 ≈ 3,3 cm

42 $\frac{AB}{AO} = \frac{AC}{AS} = \frac{BC}{OS}$
OS = 1 × 8 : 3,2 = 2,5

43 **1.** À l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle ABE rectangle en A, on trouve BE = 4,375 m.
2. À l'aide du théorème de Thalès, on trouve BC = 3,5 × 1,5 : 2,625 = 2 m.

44 Les droites (AD) et (BV) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (DV) : elles sont donc parallèles. On peut énoncer le théorème de Thalès :
$\frac{RV}{RD} = \frac{BV}{AD}$ soit $\frac{12}{20} = \frac{15}{AD}$ d'où :
$AD = \frac{15 \times 20}{12} = \frac{3 \times 5 \times 4 \times 5}{3 \times 4} = 25.$
Comme 25 < 30, il pourra effectivement installer sa corde entre les points A et D.

45 A Oui

46 **1.** $\frac{CA}{CE} = \frac{1,4}{3,5} = \frac{2}{5}$ et $\frac{CB}{CF} = \frac{1,2}{3} = \frac{2}{5}$
2. AB = 3,7 × 1,4 : 3,5 = 1,48 cm

47 **1.** (BC) et (EF) sont perpendiculaires à une même troisième droite (DC), donc elles sont parallèles entre elles.
2. On applique le théorème de Pythagore : BC = 2,4 cm.
EF = 3 × 2,4 : 4 = 1,8 cm.
3. DC = 2,4 × 7 : 3 = 5,6 cm.
4. Les droites (FG) et (EC) ne sont pas parallèles.

■ Je résous des problèmes

48 **1.** Il faut placer P en D.
2. Quelle que soit la position du point P, les longueurs SP, SR, SM et SN restent inchangées.

49 FG = 70 × 180 : 80 = 157,5 cm.

50 À vérifier sur le cahier des élèves.

51 La longueur AB de la barre est environ égale à 66,7 cm.

52 **1.** Théorème de Thalès dans IML et IHK : $\frac{2,5}{4,5} = \frac{IH}{IH + 3,2}$, soit IH = 4.
2. Théorème de Pythagore dans GHI : $GI^2 = 4^2 + 3^2$, GI = 5.
3. Théorème de Thalès dans IGH et IJK : $\frac{2,5}{5} = \frac{JK}{3}$, JK = 1,5.
4. Réciproque du théorème de Pythagore dans IJK : (IJ) ⊥ (JK)
5. Les droites vertes sont perpendiculaires à une même troisième droite (HJ), donc elles sont parallèles entre elles.

53 **1.** $\frac{HI}{HD} = \frac{1}{3}$ et $\frac{HJ}{HA} = \frac{1}{3}$
2. a. On applique le théorème de Pythagore : $HC = \sqrt{34}$ cm
b. $HK = \frac{\sqrt{34}}{3}$ cm
3. a. On applique le théorème de Pythagore : $HB = \sqrt{50}$ cm
b. $HL = \frac{\sqrt{50}}{3}$ cm
4. $\frac{HJ}{HA} = \frac{1}{3}$ et $\frac{HL}{HB} = \frac{\frac{\sqrt{50}}{3}}{\sqrt{50}} = \frac{1}{3}$

54 **1.** $\frac{2}{2+x}=\frac{3}{5}$ **2.** $RN=\frac{4}{3}$

55 **1.** $\frac{\frac{x}{2}}{1775}=\frac{20}{x+34}$

2. On développe l'expression $(x-250)(x+284)$

3. $x=250$ et $x=-284$. La ville mesure 250 pas de côté.

Dans les autres matières

56 $\frac{383120}{150000000+r}=\frac{1750}{r}$

$r \approx 688\,308$ km

57 Longueur réelle du parcours :
300 m + 500 m + 1 250 m + 750 m = 2 800 m.

58 **1.** $\frac{AN}{AC}=\frac{3}{3{,}6}$ and $\frac{AM}{AB}=\frac{4{,}5}{5{,}4}$

We note that $3\times 5{,}4 = 3{,}6\times 4{,}5$. Hense, from the Reverse of the Intercept Theorem, the lines (BC) and (MN) are parallel.

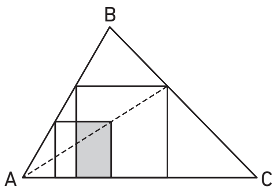
2. The lines (BM) and (CN) intersect each other in A and the lines (BC) and (MN) are parallel.

By the Intercept Theorem, we have:
$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$ I.e. $\frac{3}{3{,}6}=\frac{4{,}5}{5{,}4}=\frac{4}{BC}$ so $BC=\frac{4\times 5}{4{,}5}=4{,}8$ cm.

Jeux mathématiques

59 À vérifier sur le cahier de l'élève.

60 On commence par construire un premier carré dont trois sommets se trouvent sur le triangle. Par alignement, on obtient le premier sommet du carré solution. Les autres sommets s'obtiennent en appliquant les propriétés du carré.



61 $\frac{?}{4}=\frac{x}{5}$ et $\frac{?}{3}=\frac{x-5}{5}$ donc $\frac{?}{4}+\frac{?}{3}=\frac{x}{5}+\frac{x-5}{5}=1$

On résout l'équation $\frac{?}{4}+\frac{?}{3}=1$ et on trouve : $?=\frac{12}{7}$.

Devoirs à la maison

62 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.

2. ABC et CDE sont des triangles rectangles respectivement en B et D (inscrits dans les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$). Les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires à une même troisième droite (BD), donc elles sont parallèles entre elles.

3. Théorème de Pythagore : $BC \approx 3{,}57$ cm.

4. $\frac{3{,}5}{DE}=\frac{5}{6}\approx\frac{3{,}57}{CD}$, $DE = 3{,}5\times 6 : 5 = 4{,}2$ cm et
$CD \approx 3{,}57\times 6 : 5 \approx 4{,}28$ cm

63 **1.** $\frac{OA}{OB}=\frac{3}{4{,}5}=\frac{2}{3}$ et $\frac{OC}{OD}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

2. $\frac{OF}{4{,}5}=\frac{3}{4}$, $OF = 4{,}5\times 3 : 4 = 3{,}375$ donc les coordonnées de F sont $(0\,;-3{,}375)$.

64 **1.** $\frac{5}{AB}=\frac{10}{15}$

$AB = 5\times 15 : 10 = 7{,}5$ cm

2. $BC = 7{,}5$ cm

3. a. À vérifier sur le cahier de l'élève.

b. $AD = 7{,}5$ cm

4. $CD = 7{,}5$ cm

5. ABCD est un carré de côté 7,5 cm.

6. $V=\frac{7{,}5^2\times 15}{3}=281{,}25\,\text{cm}^3$

Avec un logiciel

Activité 1. Théorème de Thalès et homothétie

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

L'objectif est de conjecturer, puis démontrer un lieu géométrique. La plus-value du logiciel est de visualiser ce lieu de façon dynamique à l'aide de la fonction Trace.

La démonstration en est ainsi facilitée. Il suffira de prouver à l'aide du théorème de Thalès que la longueur O'M' reste constante lorsqu'on déplace le point M sur le cercle.

• ***Correction***

2. Le point M′ décrit le cercle de centre A′ et de rayon A′B.

3. $BA' = 0{,}5BA$ et $BM' = 0{,}5BM$

Activité 2. « A » comme allumettes !

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

On demande de modéliser et résoudre un problème concret. On sera amené à effectuer des calculs de longueurs à l'aide du théorème de Thalès et du théorème de Pythagore.

Le logiciel permet d'effectuer des essais comme on pourrait le faire avec de vraies allumettes. Ainsi, les élèves pourront par exemple conjecturer les positions des allumettes pour lesquelles la figure imposée (le « A ») est constructible.

La réalisation de la figure est très directive et ne présente donc aucune difficulté technique.

• ***Correction***

3. a. $BC=\sqrt{50}$

b. $AE=\frac{25}{\sqrt{50}}$

Activité 3. Spirales

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

L'objectif de l'activité est d'automatiser par agrandissements successifs la construction de spirales.

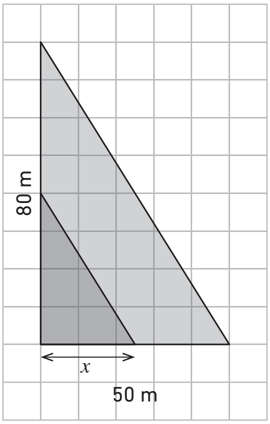
• ***Correction***

Il suffit de modifier l'angle et le pas. Par exemple, pour la spirale « hexagonale », on pourra choisir un angle de 60°.

Tâches complexes

1. Le pré

L'aire du champ est égale à 2 000 m^2.



L'aire du petit triangle en fonction de x est égale à $0{,}8x^2$.
On veut par exemple que la surface du petit triangle soit égale au quart de celle du grand (le champ) donc $0{,}8x^2 = 2000 : 4 = 500$ donc $x = 25$.
La longueur de la clôture est environ égale à 47 m (théorème de Pythagore).
Le prix de la clôture est donc environ égal à 1 200 €.

2. Le clocher

Distance au clocher = 70 850 : 1 = 59 500 cm = 595 m, soit effectivement à moins d'un kilomètre.

chapitre 10

Trigonométrie

I. Le programme

Thème D – Espace et géométrie

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (relations entre angles et parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, caractérisation de la médiatrice, théorèmes de Thalès et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en œuvre d'un raisonnement. Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie.

Attendu de fin de cycle

- Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer	
■ Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. ■ Coder une figure. ■ Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure. ■ Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture. – Position relative de deux droites dans le plan. – Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes / internes. – Médiatrice d'un segment. – Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables, hauteurs, **rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente).** – Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales. – Théorème de Thalès et réciproque. – Théorème de Pythagore et réciproque.	■ Construire des frises, des pavages, des rosaces. ■ Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie. ■ Faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation. ■ Distinguer un résultat de portée générale d'un cas particulier observé sur une figure. ■ Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité. ■ Utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des angles. ■ Démontrer, par exemple, que des droites sont parallèles ou perpendiculaires, qu'un point est le milieu d'un segment, qu'une droite est la médiatrice d'un segment, qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré. ■ Étudier comment les notions de la géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Ératosthène, distance de la Terre à la Lune par Lalande et La Caille, etc.).

** En **gras** : ce qui est étudié dans ce chapitre.*

II. Contexte du chapitre

Ce chapitre va permettre aux élèves d'avoir des outils supplémentaires pour réaliser une tâche qui était prédominante pour nos ancêtres : « mesurer des distances inaccessibles ». Il ne faudra pas se priver de cette entrée et voir comment cela pourrait même être mis en application à l'intérieur de l'établissement, en mesurant par exemple la hauteur d'un bâtiment ou d'un grand arbre.
On pourra également mettre ce chapitre en relation avec les deux grands théorèmes connus des élèves pour calculer des longueurs, à savoir le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès.
Ce chapitre exploitera entre autre les connaissances déjà acquises sur le triangle rectangle et sur les triangles semblables afin de prouver que les rapports ne dépendent que de l'angle et non de la longueur des côtés. Il conviendra donc de le traiter une fois que ces notions seront acquises et stabilisées.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	■ Fichiers textes modifiables des activités
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Écrire les formules de trigonométrie dans le triangle rectangle ■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer une longueur avec cos, sin ou tan ■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer un angle avec cos, sin ou tan
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Figure dynamique ■ Activité 2 : Deux programmes Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et tableur) et leurs tutoriels vidéos
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Histoire de lampadaire

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Découvrir des rapports trigonométriques

• *Considérations didactiques et mise en pratique*
Le but de cette activité est de conjecturer que les trois rapports considérés ne dépendent que de l'angle. Une fois ceci remarqué sur un exemple à valeur générique, cette propriété sera conjecturée puis démontrée à l'aide du théorème de Thalès. Ces rapports seront alors nommés cosinus, sinus et tangente. Il est important que ces mots n'apparaissent que comme des noms donnés aux rapports afin de ne pas donner un aspect fonctionnel à cette notion.

• *Correction*
2. Ils ont tous la même forme, les mêmes angles. Ils sont semblables.
4. b. On remarque que pour un même rapport, ces valeurs sont très proches.
c. On peut conjecturer que quelles que soient les dimensions du triangle, ces rapports sont égaux.
5. a. (AC)//(A′C′) car elles sont perpendiculaires à (AB).
b. En appliquant le théorème de Thalès, on obtient $\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$.
c. En utilisant l'égalité des produits en croix, on prouve que $\frac{BA'}{BC'} = \frac{BA}{BC}$.
On vient de prouver que le rapport $\frac{BA}{BC}$ est le même, quelles que soient les dimensions du triangle ABC.
e. Non.

Activité 2. Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

• *Considérations didactiques et mise en pratique*
Dans cette activité, les élèves vont être amenés à utiliser le cosinus et la tangente pour calculer des longueurs dans un triangle rectangle. Ils seront guidés dans cette démarche au travers de questions qu'ils seront amenés à se poser dans d'autres situations similaires. Plus que les calculs eux-mêmes et les résultats obtenus, il faudrait travailler avec les élèves le côté générateur de cette activité de par les questions qu'elle amène à se poser dans ce type de situations.

• *Correction*

2. $\sin 35° = \frac{TH}{TK}$ $\cos 35° = \frac{7}{TK}$ $\tan 35° = \frac{TH}{7}$

3. a. $\cos 35° = \frac{7}{TK}$

b. $TK \approx 8{,}5$ cm

4. $TH \approx 4{,}9$ cm

5. On cherche le rapport qui fait intervenir le côté cherché et un côté connu.

Activité 3. Déterminer la mesure d'un angle d'un triangle rectangle

• *Considérations didactiques et mise en pratique*

Comme l'activité précédente, celle-ci va aider les élèves à se poser les bonnes questions afin de déterminer la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle dont on connait deux côtés.

L'idée à dégager est d'amener les élèves à déterminer la valeur d'un rapport et ainsi, grâce à la calculatrice, d'en déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle considéré. Pour cela, il faudra bien sûr décider au départ lequel des trois rapports (sinus, cosinus, tangente) les côtés connus vont permettre de le calculer.

• *Correction*

2. On connait le côté opposé à $\widehat{B}$ et le côté adjacent à $\widehat{B}$.

3. $\tan \widehat{B} = \frac{7}{5} = 1{,}4$

4. $\widehat{ABC} = 54°$

■ Objectif 1. Connaitre le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu

Je m'entraine

1 **a.** 0,8 **b.** 0,6 **c.** $\frac{4}{3}$
d. 0,6 **e.** 0,8 **f.** 0,75

2 **1. a.** [BC] **b.** [AC] **c.** [AB]
2. $\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC}$ $\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC}$ $\tan\widehat{B} = \frac{AC}{AB}$

3 $\sin\widehat{D} = \frac{EF}{DF}$ $\cos\widehat{D} = \frac{DE}{DF}$ $\tan\widehat{D} = \frac{EF}{ED}$

4 $\sin\widehat{H} = \frac{GI}{HI}$ $\cos\widehat{H} = \frac{HG}{HI}$ $\tan\widehat{H} = \frac{GI}{HG}$

5 $\sin\widehat{J} = 0{,}8$ $\cos\widehat{J} = 0{,}6$ $\tan\widehat{J} = \frac{4}{3}$

6 **1.** $\cos\widehat{M} = \frac{NM}{MO}$ $\tan\widehat{M} = \frac{NO}{NM}$
2. MNO est rectangle en N.

7 **1.** $\tan\widehat{A} = \frac{4}{3}$ **2.** $AB = 3$ m et $BC = 4$ m

8 **1.** Oui
2. Non, un cosinus ne peut pas être plus grand que 1.
3. Non, $\widehat{G}$ est l'angle droit.
4. Non, un sinus ne peut pas être plus grand que 1.
5. Oui **6.** Oui

9 $\sin 47° \approx 0{,}731$ $\cos 59° \approx 0{,}515$ $\tan 23° \approx 0{,}424$

Je résous des problèmes simples

10 C'est $\cos\widehat{B} = \frac{12}{13}$

11 **1.** JKL est isocèle et rectangle en J. **2.** $\widehat{K} = \widehat{L} = 45°$

12 **2.** $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
4. DEF est isocèle et rectangle en D.

13 **2.** $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ **4.** $\sin\widehat{D} = 0{,}6$ et $\tan\widehat{D} = 0{,}75$

14 **2.** Ce rapport exprime la tangente de l'angle aigu compris entre l'hypoténuse et le côté représentant le déplacement horizontal.
3. a. À son hypoténuse.
b. Environ 100,5 m.
c. $\frac{10}{100{,}5}$
d. Le sinus de l'angle aigu compris entre l'hypoténuse et le côté représentant le déplacement horizontal.
4. L'écart est très petit.

15 **1.** $JK = 5$ cm $KL = 12$ cm $JL = 13$ cm
2. $\cos\widehat{J} = \frac{5}{13}$ $\cos\widehat{L} = \frac{12}{13}$ $\tan\widehat{J} = \frac{12}{5}$ $\tan\widehat{L} = \frac{5}{12}$

■ Objectif 2. Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

Je m'entraine

16 **a.** $SR \approx 6{,}7$ cm et $PR \approx 3{,}1$ cm.
b. $VT \approx 5{,}7$ cm et $TU \approx 2{,}7$ cm.

17 $AC \approx 5{,}2$ cm $AB \approx 7{,}4$ cm

18 $FD \approx 8{,}4$ cm $FE \approx 4{,}7$ cm

19 $GH \approx 6{,}8$ cm $GI \approx 6{,}2$ cm

20 $MO \approx 6{,}9$ cm et $MN \approx 5{,}8$ cm.

21 **1.** $JK \approx 10{,}8$ cm **2.** $JL \approx 4{,}4$ cm

22 **1.** $ON \approx 6{,}2$ cm **2.** $MN \approx 3{,}2$ cm

23 **1.** $QR \approx 11{,}9$ cm **2.** $PR \approx 7{,}6$ cm

24 **1.** $TU \approx 9{,}9$ cm **2.** $SU \approx 1{,}9$ cm

Je résous des problèmes simples

25 Hauteur du cerf-volant : 43 m.

26 $BC = \frac{5}{\sin(53°)} \approx 6{,}3$ cm

27 Largeur de la rivière : 60,09 m.

28 Longueur du câble : 86,38 m.

29 Périmètre ABCD : environ $9{,}7 + 5{,}4 + 7{,}2 + 3{,}5 = 25{,}8$ cm.

Objectif 3. Déterminer la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle

Je m'entraine

30 **a.** 24° **b.** 26° **c.** 70° **d.** 42° **e.** 56° **f.** 14°

31 $\widehat{ACB} \approx 55°$

32 $\widehat{EFD} \approx 65°$

33 $\widehat{HIG} \approx 66°$

34 $\widehat{KLJ} \approx 59°$

35 $\widehat{MNO} \approx 20°$

36 $\widehat{PRQ} \approx 36°$

37 $\widehat{SUT} \approx 57°$

38 **1.** $\widehat{VXW} \approx 56°$ **2.** $\widehat{VWX} \approx 34°$

Je résous des problèmes simples

39 Tom a inversé le côté opposé et le côté adjacent dans son calcul. $\widehat{ACB} \approx 58°$

40 **1.** $\widehat{BCD} \approx 36°$
2. $\widehat{BDC} \approx 54°$ $\widehat{EDB} \approx 126°$ $\widehat{EAB} \approx 54°$

41 **1.** $\widehat{IGH} \approx 62°$ et $\widehat{IGF} \approx 31°$ ce qui donne environ $\widehat{FGH} \approx 93°$. (IH) et (GF) ne sont donc pas parallèles.
2. IHGF n'est donc pas un trapèze.

42 $\widehat{B} \approx 24°$ et $\widehat{C} \approx 66°$. C'est donc l'angle $\widehat{C}$ le plus grand.

43 Avec cette méthode, l'échelle fait un angle de 65,5° avec le sol environ. Cela correspond bien aux recommandations.

44 **1.** $\widehat{G} \approx 33°$ **2.** $\widehat{H} \approx 57°$

Je travaille seul(e)

45 B **46** C **47** A **48** B **49** A

50 $\sin\widehat{Z} = \frac{WT}{TZ}$ $\cos\widehat{Z} = \frac{WZ}{TZ}$ $\tan\widehat{Z} = \frac{WT}{WZ}$

51 **1.** $\sin\widehat{A} = \frac{BC}{AB}$ $\cos\widehat{A} = \frac{AC}{AB}$ $\tan\widehat{A} = \frac{BC}{AC}$

2. $\sin\widehat{B} = \frac{AC}{AB}$ $\cos\widehat{B} = \frac{BC}{AB}$ $\tan\widehat{B} = \frac{AC}{BC}$

3. $\sin\widehat{A} = \cos\widehat{B}$ et $\sin\widehat{B} = \cos\widehat{A}$

52 **b.** $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

53 **a.** $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

54 **1.** AB est l'hypoténuse, BC est le côté opposé à $\widehat{A}$ et AC est le côté adjacent à $\widehat{A}$.
2. a. On doit utiliser le sinus car on connait le côté opposé à A et on cherche l'hypoténuse.
b. AB ≈ 3,9 cm.

55 **1.** AC est l'hypoténuse, BC est le côté opposé à $\widehat{A}$ et AB est le côté adjacent à $\widehat{A}$.
2. a. On doit utiliser le cosinus car on connait l'hypoténuse et on cherche le côté adjacent à $\widehat{A}$.
b. AB ≈ 4,9 cm

56 AB ≈ 5,5 cm et AC ≈ 6,2 cm.

57 ED ≈ 6,7 cm et FD ≈ 8,2 cm.

58 **a.** EF ≈ 2,4 cm **b.** EF ≈ 2,2 cm

59 **b.** GH ≈ 6,4 cm

60 **b.** KL ≈ 1,8 cm

61 VW ≈ 8,1 cm et VX ≈ 9,0 cm.

62 YA ≈ 4,7 cm et ZA ≈ 8,7 cm.

63 **1.** Hypoténuse : [AB] ; côté opposé à $\widehat{B}$: [AC] ; côté adjacent à $\widehat{B}$: [BC]
2. a. $\sin\widehat{B}$ **b.** $\widehat{B} \approx 36°$

64 **a.** $\widehat{C} \approx 63°$ **b.** $\widehat{E} \approx 63°$

65 **2.** $\widehat{KLJ} \approx 38°$

66 **2.** $\widehat{OMN} \approx 55°$

67 **2.** $\widehat{PSR} \approx 24°$

Je résous des problèmes

68 **1. a.** Il y a trois triangles rectangles.
2. a. $\widehat{EFH} \approx 55°$ $\widehat{HFG} \approx 35°$ $\widehat{HGF} \approx 55°$
3. FH = 4 cm ; EH = 5,7 cm ; FG = 4,9 cm ;
HG = 2,8 cm ; EG = 8,5 cm.

69 **1.** $\widehat{ABC} \approx 30{,}91°$ **2.** AC = 3,05 m

70 AC ≈ 5,6 cm ; DC ≈ 6,4 cm ; BC ≈ 3 cm ;
$\widehat{BAC} \approx 33°$; $\widehat{BCA} \approx 57°$; $\widehat{ACD} \approx 28°$.

71 **1. a.** C'est la tangente de l'angle rouge.
b. Il mesure environ 61°.
2. L'angle bleu mesure environ 29°.
3. Longueur : 88,9 cm et largeur : 50 cm.

72 Le fleuve a une largeur d'environ 84,55 m.

73 Si l'un des côtés de l'angle droit mesure 10 cm, alors le périmètre du triangle vaut 34,1 cm et son aire vaut 50 cm^2.
Si l'hypoténuse du triangle vaut 10 cm, alors le périmètre du triangle vaut 24,1 cm et son aire vaut 25 cm^2.

74 Le sommet de l'abbaye se trouve à :
$$\frac{50 \times \tan(40)}{\tan(48) - \tan(40)} \times \tan(48) \approx 172 \text{ m}.$$

75 **1.** À vérifier sur le cahier de l'élève.
2. $\cos\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$.
3. $AC^2 = 144$ et $AB^2 + BC^2 = 144$ donc ABC est rectangle en B.

76 Le puits a une profondeur de 7,28 m.

77 **1.** $\widehat{OAE} \approx 39°$ et $\widehat{AEO} \approx 51°$.
2. a. $EI = \sqrt{9153}$ **b.** Aire de EBC : environ 6 027 cm^2.
3. a. 3,9984 m^2 soit environ 4 m^2.
b. 0,8 L de peinture suffiront.

78 **1.** $AE = 10 + x$
2. $\tan\widehat{BEF} = \frac{BF}{x} = \frac{10}{10+x}$ donc $BF = \frac{10x}{10+x}$.
3. $x = \frac{40}{6} \approx 6{,}7$

Dans les autres matières

79 **1.** 8,5° environ.
2. Sur route à partir de 5,7° et sur autoroute à partir de 2,3°.
3. Il est plus dangereux de rouler sur une route qui fait un angle de 20° avec l'horizontale. (Dans le cas des 20 %, cela correspond à un angle de 11,3°.)

80 La Tamise a donc une largeur d'environ 275 m à cet endroit.

Jeux mathématiques

81

											1T	R	I	2A	N	G	L	E		
														D						
														J						
														A						
												3R	E	C	T	A	N	G	L	E
														E						
										4C	5O	S	I	N	U	6S				
											P			T		I				
											P					N				
											O					U				
											S					S				
							7T	8A	N	G	E	N	T	E						
								I												
								G												
9H	Y	P	O	T	H	E	N	U	S	E										

82 Environ 26,6°.

83 Dans un triangle rectangle, si x est la mesure d'un angle aigu, l'autre angle aigu mesure $90 - x$. De plus, le côté opposé à un angle est le côté adjacent à l'autre. Ce qui explique que $\sin(x) = \cos(90 - x)$.

Devoirs à la maison

84 **1.** 2π
2. a. $\widehat{AOB} \approx 60°$
b. AOB est équilatéral.
c. $AB = 1$
d. Périmètre de l'hexagone inscrit : 6
3. a. $OD = 1$ car c'est un rayon.
b. ODC est rectangle en D.
c. $\widehat{DOC} \approx 30°$
e. Périmètre de l'hexagone circonscrit : $4\sqrt{3}$
4. $3 < \pi < 3{,}5$. Un seul chiffre.
5. Il permettait de connaitre 3 chiffres : 3,14.

Avec un logiciel

Activité 1. La transformation au rugby

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité va montrer aux élèves comment on peut modéliser un problème concret à l'aide d'un ordinateur. Une fois la figure réalisée, diverses questions seront posées afin d'utiliser le mouvement offert par le logiciel pour trouver des réponses adaptées. L'objectif ici étant autant la résolution du problème que sa modélisation qui pourra être étendue à d'autres cas.

La construction de la figure dynamique n'est pas aisée à priori mais celle-ci est bien guidée afin de permettre à tous les élèves d'y parvenir. Il sera peut-être utile de les aider au départ pour régler convenablement le zoom de la fenêtre.

• Correction

1. Non pas au plus près, mais plutôt avec le meilleur angle possible.
3. a. Il doit se placer environ à 25,4 m où il verra les poteaux sous un angle de 6,43°.
b. Il doit se placer environ à 30 m où il verra les poteaux sous un angle de 5,36°.
c. Il doit se placer environ à 35 m où il verra les poteaux sous un angle de 4,59°.
d. Angle maximal : 15,94 °. L'essai aura été marqué entre les poteaux.

Activité 2. Calculs dans le triangle rectangle

• Considérations didactiques et mise en pratique

Cette activité va permettre d'automatiser et de faire le bilan des connaissances des élèves. Ils vont devoir distinguer les deux grands cas de figure où l'on peut trouver tous les côtés et angles d'un triangle rectangle, à savoir le cas où l'on connait 2 côtés et le cas où l'on connait 1 côté et 1 angle. Dans chacun des cas, qui pourra être traité par un bloc, l'automatisation des calculs nécessaire à la programmation permettra aux élèves de prendre du recul et de mieux assimiler encore les connaissances de ce chapitre.

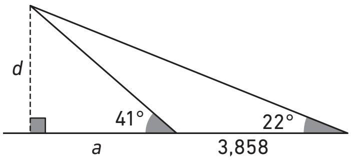
• Correction

À vérifier sur le cahier et l'ordinateur de l'élève.

Tâches complexes

1. Se repérer en pleine mer

À la vitesse de 5 nœuds, le bateau parcourt 9,26 km en une heure.
En 25 minutes, le bateau a donc parcouru environ 3,858 km.
On peut alors schématiser la situation ainsi :



Ce qui donne :

$d = a \times \tan(41°)$

$d = (a + 3{,}858) \times \tan(22°)$

Donc $a = \dfrac{3{,}858 \times \tan(22°)}{\tan(41°) - \tan(22°)}$

Et donc $d = \dfrac{3{,}858 \times \tan(22°)}{\tan(41°) - \tan(22°)} \times \tan(41°) \approx 2{,}912$ km.

Le bateau passera donc quasiment à 3 km du Phare de la Vieille en gardant ce cap.
En suivant le même raisonnement, on peut justifier la méthode de Traub.
En effet :

$\tan(63°) \approx 1{,}96 \approx \dfrac{2d}{d}$ $\qquad \tan(45°) = 1 = \dfrac{2d}{2d}$

$\tan(34°) \approx 0{,}67 \approx \dfrac{2d}{3d}$ $\qquad \tan(26{,}5°) \approx 0{,}5 = \dfrac{2d}{4d}$

$\tan(22°) \approx 0{,}4 = \dfrac{2d}{5d}$

2. Histoire de lampadaire

Il s'agit ici d'estimer au mieux la hauteur du lampadaire.
En faisant un petit schéma, on trouve que cette hauteur est égale à $8{,}1 \times \tan(42{,}1°) \approx 7{,}3$ m.
Le lampadaire a donc une longueur inférieure à la distance qui le sépare de la voiture.
En théorie, il n'y aurait pas besoin de déplacer la voiture.
Mais étant, à 80 cm il semble plus sage de la déplacer quand même.

chapitre 11

Géométrie dans l'espace

I. Le programme

Thème D – Espace et géométrie

Au cycle 3, les élèves ont découvert différents objets géométriques, qui continuent à être rencontrés au cycle 4. Ils valident désormais par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent. Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (relations entre angles et parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, caractérisation de la médiatrice, théorèmes de Thalès et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en œuvre d'un raisonnement. Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie.

Attendus de fin de cycle

- Représenter l'espace.
- Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées.
- Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques.

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Représenter l'espace	
■ (Se) repérer sur une droite graduée, dans le plan muni d'un repère orthogonal, dans un parallélépipède recrangle ou sur une sphère. – Abscisse, ordonnée, altitude. – Latitude, longitude. ■ Utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales. ■ Développer sa vision de l'espace.	■ Repérer une position sur carte à partir de ses coordonnées géographiques. ■ Mettre en relation diverses représentations de solides (par exemple, vue en perspective, vue de face, vue de dessus, vue en coupe) ou de situations spatiales (par exemple schémas, croquis, maquettes, patrons, figures géométriques). ■ Utiliser des solides concrets (en carton par exemple) pour illustrer certaines propriétés. ■ Utiliser un logiciel de géométrie pour visualiser des solides et leurs sections planes afin de développer la vision dans l'espace. Faire le lien avec les courbes de niveau sur une carte.
Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées	
■ Mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, en conservant les unités. ■ Vérifier la cohérence des résultats du point de vue des unités. – Notion de grandeur produit et de grandeur quotient. – Formule donnant le volume d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône ou d'une boule.	■ Identifier des grandeurs composées rencontrées en mathématiques ou dans d'autres disciplines (par exemple, aire, volume, vitesse, allure, débit, volumique, concentration, quantité d'information, densité de population, rendement d'un terrain). ■ Commenter des documents authentiques (par exemple, factures d'eau ou d'électricité, bilan sanquin).

** En **gras** : ce qui est étudié dans ce chapitre.*

Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques	
■ Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires, les volumes ou les angles. – Notion de dimension et rapport avec les unités de mesure (m, m^2, m^3).	■ Utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (architecture, maquettes), l'échelle d'une carte. ■ Utiliser un système d'information géographique (cadastre, géoportail, etc.) pour déterminer une mesure de longueur ou d'aire ; comparer à une mesure faite directement à l'écran.

II. Contexte du chapitre

Ce chapitre de la classe de Troisième est l'occasion de faire un bilan sur les connaissances des élèves à propos de la géométrie dans l'espace. Il permet de revoir les différents solides étudiés dans les classes antérieures (cube, parallélépipède rectangle, prisme, cylindre, cône, pyramide) et d'en découvrir de nouveaux : la sphère et la boule. Cette étude viendra compléter leur formulaire sur les aires et volumes. Ce sera d'ailleurs l'occasion de faire des regroupements judicieux d'objets afin de globaliser cette connaissance et de retenir plus aisément ces formules.
Dans ce chapitre, un premier pas vers la géométrie dans l'espace qui sera faite au lycée est amorcé par le biais des sections de ces solides par un plan et d'une introduction aux coordonnées dans l'espace. Même si l'on reste dans des cas simples de découpe, il est important à cette occasion de faire remarquer aux élèves que les problèmes posés vont se résoudre en recherchant dans quelle figure plane ils vont pouvoir travailler et ainsi utiliser leur connaissances.
Enfin, l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur une aire ou un volume est étudié. Il est essentiel que les élèves acquièrent cette connaissance, d'une part pour accélérer leurs calculs sur ce thème mais également pour avoir une meilleure perception des grandeurs que sont l'aire et le volume.
Enfin, la perception de ce que sont la latitude, la longitude et l'altitude aidera les élèves à mieux comprendre et cerner le monde qui les entoure.

III. Ressources disponibles sur le site compagnon

Avant de commencer	■ Un QCM interactif pour faire le point
Cherchons ensemble	Fichiers texte modifiable des activités : ■ Activité 2 : Figure dynamique
Objectif 1 **Objectif 2** **Objectif 3**	■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer l'aire et le volume d'une boule ■ Vidéo « *Je comprends* » : Se repérer sur la sphère ■ Vidéo « *Je comprends* » : Calculer une longueur dans un solide
Je travaille seul(e)	■ Un QCM interactif pour faire le point sur le cours
Avec un logiciel	Pour aider à la correction en vidéo-projection : ■ Activité 1 : Tableur ■ Activité 2 : Tableur ■ Activité 3 : Tableur ■ Activité 4 : Programme Scratch Pour que les élèves travaillent en autonomie : ■ Fiches logiciel (GeoGebra et Tableur) et leurs tutoriels vidéo
Les problèmes DUDU	■ Vidéo : Pour un feu de cheminée

IV. Corrections et intentions pédagogiques

■ Cherchons ensemble

Activité 1. Découvrir la sphère et la boule

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

En faisant le parallèle avec le vocabulaire cercle/disque, le but de cette activité est de transposer cette connaissance du plan dans l'espace afin de définir de nouveaux objets mathématiques en s'appuyant sur les connaissances d'objets similaires dans le monde réel.

• ***Correction***

1. a. Le cercle de centre I et de rayon 5 cm.

b. Le disque de centre I et de rayon 5 cm.

2. La sphère est l'ensemble des points de l'espace qui se trouvent à une même distance d'un point qui est le centre de la sphère.

Une boule est l'ensemble des points de l'espace qui se trouvent à une distance inférieure ou égale à une valeur donnée d'un point qui est le centre de la sphère.

Activité 2. Calculer l'aire d'une sphère et le volume d'une boule

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

En classe de Troisième, les formules d'aire d'une sphère et de volume d'une boule ne peuvent pas être démontrées. La pratique habituelle est donc de donner ces formules à apprendre et de les faire utiliser. Cette activité se propose de faire découvrir aux élèves un lien entre la formule de l'aire d'un disque et l'aire d'une sphère de même rayon d'une part, et un lien entre le volume d'une boule et le volume d'un cylindre de même rayon du disque de base et de même hauteur. Les liens ainsi créés permettront aux élèves une meilleure mémorisation des formules obtenues. Au-delà de ces liens, le travail algébrique autour de la découverte de ces formules sera des plus intéressants, en particulier pour le volume de la boule. Si vous ne possédez pas le logiciel CABRI 3D, vous pouvez aussi télécharger sur le site compagnon des figures manipulables (après installation du plugin gratuit Cabri 3D qui est téléchargeable sur le site de Cabri 3D).

• ***Correction***

1. d. L'aire de la sphère est 4 fois plus grande que l'aire du disque.

2. L'aire d'une sphère de rayon R est égale à $4 \times \pi \times R^2$.

3. f. La boule occupe les deux tiers du volume du cylindre.

4. a. $H = 2r$

b. Volume d'une boule : $\frac{2}{3} \times \left(2 \times R \times \pi \times R^2\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$

Activité 3. Se repérer dans l'espace

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Cette activité permettra de mettre en avant la nécessité d'introduire une troisième coordonnée pour se repérer dans l'espace. À partir d'une situation plus ou moins futuriste mais pas improbable, la nécessité d'avoir une coordonnée pour exprimer l'altitude vient naturellement. Le fait que le problème soit concret permet aux élèves de s'y impliquer et ils pourront s'appuyer dessus par la suite en conservant en tête cette situation de référence.

• ***Correction***

1.

Sommet	Abscisse	Ordonnée	Altitude
A	0	0	0
B	6	0	0
C	6	10	0
D	0	10	0
E	0	0	3
F	6	0	3
G	6	10	3
H	0	10	3

2. a. Son altitude est 0.

b. Abscisse 3, ordonnée 5 et altitude 1,5.

c. Il est plus près du sommet B.

3. En utilisant le théorème de Pythagore, on trouve qu'il est à $\sqrt{89}$ m de sa base, soit 9,4 m environ.

Activité 4 : Utiliser des sections de cônes

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***

Dans cette activité, outre la nature de la section recherchée, on va commencer à travailler sur la réduction à l'aide du théorème de Thalès. Il faut travailler avec les élèves le passage de l'espace au plan qui va leur permettre d'appliquer les théorèmes connus et ainsi pouvoir calculer les longueurs attendues.

• ***Correction***

1. Cette section est un disque.

2. À vérifier sur le cahier de l'élève.

3. $O'C' = 1{,}2$ cm

4. $V = 1{,}44\pi \approx 4{,}5$ cm^3

5. a. 0,3 **b.** 0,027 **c.** 0,09

■ Objectif 1. Calculer l'aire d'une sphère et le volume d'une boule

Je m'entraine

1 **a.** 314 cm^2 **b.** 201 m^2 **c.** 14 137 m^3 **d.** 905 cm^3

2 **a.** OA = 4 cm **b.** OB = 4 cm **c.** OK = 4 cm
d. OC = 4 cm **e.** AI = 8 cm **f.** AK = ?
g. KI = ? **h.** JK = ? **i.** OJ = 4 cm
j. BK = ?

3 **1. a.** 36π cm^2 **b.** 113,1 cm^2
2. a. $73{,}96\pi$ cm^2 **b.** 232,4 cm^2

4 **1. a.** $\frac{500}{3}\pi$ cm^3 **b.** 523,6 cm^3
2. a. $\frac{4913}{750}\pi$ m^3 **b.** 20,6 m^3

5 **1. a.** 688 m^2 **b.** 6,88 dam^2
2. a. 1 697 m^3 **b.** 1 697 000 L

6 **1.** 196π cm^2 **2.** 615,75 cm^2

7 **1.** 288π m^3 **2.** 904,779 m^3

8 **1. a.** 22,9 cm^2 **b.** 10 cm^3
2. a. 172,0 cm^2 **b.** 212,17 cm^3

Je résous des problèmes simples

9 **a.** 1 521 cm^2 et 5 575 cm^3
b. 1 385 cm^2 et 4 849 cm^3
c. 1 134 cm^2 et 3 591 cm^3
d. 1 810 cm^2 et 7 238 cm^3

10 **1.** Son rayon est compris entre 10,9 cm et 11,3 cm.
2. En prenant 11 cm comme valeur pour le rayon, on obtient Aire = 1 521 cm^2 et Volume = 5 575 cm^3.

11 Jules a confondu diamètre et rayon. Le rayon de la boule est de 0,65 m donc son volume est d'environ 1 m^3.

12 **1. a.** 40 030 km
b. 510 064 472 km^2
c. 147 918 696 km^2
2. 1 083 206 917 000 km^3

13 **1.** Le rayon de la boule est de 4,8 dm donc son volume est 147,456π dm^3.
2. 463 dm^3

14 Solide A : 884 m^3 Solide B : 905 m^3.
C'est donc le solide B.

15 **1.** 58,7 cm^3
2. Environ 85 cônes.

16 **1.** Cylindre : 128π cm^3
Cône : $\frac{128}{3}\pi$ cm^3
Boule : $\frac{256}{3}\pi$ cm^3
2. L'eau atteint le haut du verre.

17 Solide A : 58,3 cm^3
Solide B : 57,9 cm^3
Solide C : 58,926 cm^3
Solide B < Solide A < Solide C

■ Objectif 2. Se repérer dans l'espace

Je m'entraine

18 **a.** +40° **b.** –50° **c.** +60° **d.** –40°
e. +10°, –30° **f.** –20°, +70°

19 **1.** Vrai **2.** Faux **3.** Vrai **4.** Vrai

20 **1.** Abscisse 6 et ordonnée 4.

2.

Sommet	Abscisse	Ordonnée	Altitude
A	0	0	0
B	10	0	0
C	10	8	0
D	0	8	0
E	0	0	4
F	10	0	4
G	10	8	4
H	0	8	4

3.

Milieu du segment	Abscisse	Ordonnée	Altitude
[AB]	5	0	0
[BC]	10	4	0
[CD]	5	8	0
[DA]	0	4	0
[EF]	5	0	4
[FG]	10	4	4
[GH]	5	8	4
[HE]	0	4	4
[AE]	0	0	2
[BF]	10	0	2
[CG]	10	8	2
[DH]	0	8	2

4.

Centre de la face	Abscisse	Ordonnée	Altitude
ABCD	5	4	0
EFGH	5	4	4
ABFE	5	0	2
BCGF	10	4	2
CDHG	5	8	2
ADHE	0	4	2

Je résous des problèmes simples

21

Latitude 40,7°
Longitude –74°
• New-York

Latitude –22,9°
Longitude –43,2°
• Rio de Janeiro

Latitude 14,7°
Longitude –17,4°
• Dakar

Latitude 39,9° Longitude 116,4°	• Pékin
Latitude –33,9° Longitude 151,2°	• Sidney
Latitude 48,9° Longitude 2,3°	• Paris

22 **1. a.** AC = $\sqrt{136}$ cm
b. ACG est rectangle en C.
AG = $\sqrt{152}$ cm
2. AI = $\sqrt{38}$ cm
AJ = $\sqrt{36}$ cm
AK = $\sqrt{42}$ cm
a. Le point K est le plus éloigné du point A.
b. Le point J est le plus proche du point A.
3. Le centre du pavé droit se trouve à une distance égale à $\sqrt{77}$ cm du point A.

23 À vérifier sur le cahier de l'élève.

24 On peut utiliser un site comme :
http://www.coordonnees-gps.fr/

Lieu	Latitude	Longitude	Altitude
Le sommet de la Tour Eiffel	48,858554	2,294460	359 m
Le sommet de l'Everest	27,987898	86,925315	8 809 m
Le sommet du volcan Teide à Ténérife	28,272338	–16,642508	3 688 m
Le haut de la statue de la liberté	40,689249	–74,044500	95 m
La plage de Copacabana	–22,971192	–43,182535	0 m
La pyramide de Khéops	29,979569	31,134170	203 m

(Certaines altitudes sont calculées en additionnant l'altitude du lieu avec la hauteur du monument.)

25

Lieu	Pays
Latitude 48° Longitude 10°	Allemagne
Latitude –10° Longitude –50°	Brésil
Latitude –20° Longitude 130°	Australie
Latitude 70° Longitude –30°	Groenland

Objectif 3. Calculer dans des sections de solides

Je m'entraine

26 **a.** On multiplie son aire par 9 et son volume par 27.
b. Son aire est divisée par 4 et son volume par 8.
c. 240 m^3

27 **1.** ADEF est un rectangle.
3. ADE est un triangle rectangle.
4. a. AE = $\sqrt{45}$ **b.** AE ≈ 6,7 cm

28 **1.** SOA est un triangle rectangle en O.
3. SA ≈ 7,3 cm

29 **1. a.** ABD est un triangle rectangle.
2. a. DB = $\sqrt{18}$ cm **b.** DB ≈ 4,2 cm
3. a. EDBG est un rectangle.
4. a. DBG est un triangle rectangle. **b.** DG ≈ 5,2 cm

Je résous des problèmes simples

30 **1.** C'est un rectangle.
2. a. OC = 4 cm et OB = 2 cm.
b. BC = $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm
c. AC = $4\sqrt{3}$ cm
3. Aire de la section : $28\sqrt{3}$ cm^2

31 **2.** PA′ = 1,875 cm.

32 **1.** Volume du grand cône : 50π cm^3
2. Volume du petit cône : $\frac{400}{27}\pi$ cm^3

33 **1.** Cette section est un disque.
3. KA′ = 1,92 cm

34 Dans le verre rempli à mi-hauteur, il y a 8 fois moins de liquide que dans le verre plein, il devrait donc coûter 8 fois moins cher. Ce n'est pas le cas, ce n'est donc pas une promotion.

35 **3.** O′A = 4 cm

Je travaille seul(e)

36 C **37** C **38** B **39** B **40** C

41 **1.** 576π m^2 **2.** 1 810 m^2

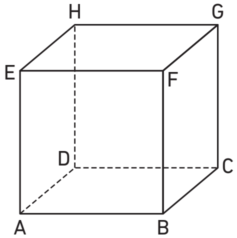
42 **1.** 25π dm^2 **2.** 79 dm^2

43 **1.** 4500π dm^3 **2.** 14 dm^3

44 **1.** $62{,}208\pi$ dm^3 **2.** 195 dm^3

45 $V_{\text{Cylindre}} = \pi \times 3^2 \times 12 = 108\pi \approx 339 \text{ cm}^3$
$V_{\text{2 Boules}} = 2 \times \left(\frac{4}{3} \times \pi \times 3^3\right) = 72\pi \approx 226 \text{ cm}^3$
$V_{\text{Restant}} = 108\pi - 72\pi = 36\pi \approx 113 \text{ cm}^3$

46 **1.**



2. En prenant comme unité le cm, on obtient :

A(0 ; 0 ; 0) B(1 ; 0 ; 0) C(1 ; 1 ; 0) D(0 ; 1 ; 0)
E(0 ; 0 ; 1) F(1 ; 0 ; 1) G(1 ; 1 ; 1) H(0 ; 1 ; 1)

47 K(5 ; 2 ; 2)

48 Latitude 30 ° nord, longitude 60° ouest.

49 **1.** En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient que le rayon du disque de section est de $\sqrt{40}$ cm.
2. Environ 6,3 cm.

50 **1.** Cette section est un disque de rayon 2,5 cm.
2. Cette section est un disque de rayon environ 1,7 cm.

51 **1.** Cette section est un carré de côté 2 cm.
2. Cette section est un carré de côté 1,6 cm.

52 ABCD a pour côté $\sqrt{18}$ cm, soit environ 4,2 cm.
SOB est un triangle rectangle en O tel que OB = 3,5 cm et SB = 5 cm.
SBC est un triangle isocèle en S tel que SB = SC = 5 cm et BC $\approx$ 4,2 cm.

53 Cette section est un disque de rayon 3,2 cm.

54 $V = 27v$

55 $37 \times 8^3 = 18\,944$ cm^3

56 **1.** En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABD, on a AD = 30 cm.
2. $V_{\text{SABCD}} = 30 \times 40 \times 81 = 97200$ cm^3
3. a. A'B'C'D' est un rectangle.
b. Le coefficient de réduction est $\frac{54}{81} = \frac{2}{3}$.
c. $V_{\text{SA'B'C'D'}} = 97\,200 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 28800$ cm^3

57 $V = 15 : 10^3 = 0{,}015$ m^3

■ Je résous des problèmes

58 **1. a.** 7,4 cm ; 7,4 cm et 22,2 cm.
b. Volume : 1 215,672 cm^3. Aire : 766,64 cm^2.
2. a. Un cylindre de hauteur 22,2 cm et de rayon du disque de base 3,7 cm.
b. Volume : environ 955 cm^3. Aire : environ 602 cm^2.
3. Plutôt le cylindre car l'aire est moins grande et donc le coût en matière première sera moins élevé.

59 **1.** Écart de volume entre deux boules de rayons 6 381 km et 6 371 km.
2. Stratosphère : $1{,}8 \times 10^{10}$ km^3.
Mésosphère : $1{,}9 \times 10^{10}$ km^3.
Thermosphère : $1{,}47 \times 10^{10}$ km^3.
3. Couche d'ozone : $1{,}28 \times 10^{10}$ km^3.

60 **1.** Environ 3,5 cm. **2.** 3,4 kg.

61 **Partie I :**
1. a. 2,413 m^3 **b.** 13 270 L
2. a. 0,75 **b.** Environ 4,580 m^3
Partie II : Les échelles sont parallèles. On utilise la réciproque du théorème de Thalès.

62 Le coefficient de réduction est 0,05. Le rayon de la petite boule est 0,45 m et celui de la grande boule est 9 m.

63 **1.** 216 cm^3
2. 36 cm^3
3. 113 cm^3
4. 365 cm^3
5. Il reste 540 – 365 = 175 cm^3 dans le récipient. Soit seulement 17,5 cL donc on ne pourra pas y verser 20 cL sans que cela déborde.

64 **1.** 7 540 cm^3 **2.** 59 kg

65 Les dimensions sont 3,5 cm ; 7 cm et 4,5 cm.

66 **1.** Hauteur du cylindre et du cône : $2r$
2. a. $V_{\text{Boule}} = \frac{4}{3}\pi r^3$ **b.** $V_{\text{Cylindre}} = 2\pi r^3$ **c.** $V_{\text{Cône}} = \frac{2}{3}\pi r^3$
3. a. $V_{\text{Boule}} = 2 \times V_{\text{Cône}}$
b. $V_{\text{Cône}} = \frac{1}{3} \times V_{\text{Cylindre}}$ **c.** $V_{\text{Boule}} = \frac{2}{3} \times V_{\text{Cylindre}}$
4. $V_{\text{Cône}} + V_{\text{Boule}} = V_{\text{Cylindre}}$
5. On constatera que l'eau arrivera à ras bord du cylindre.

67 Oui, peu importe où ce sommet se situe, le volume restant est constant et égal aux deux tiers du volume du cylindre.

■ Dans les autres matières

68 **1.** Volume de C_1 : 64π cm^3
2. a. 0,25 **b.** Volume de C_2 : π cm^3
3. a. 63π cm^3 **b.** 198 cm^3
4. 198 cm^3 = 0,198 dm^3 = 0,198 L qui inférieur à 0,2 L.

69 **1. a.** $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 2{,}625^3 \approx 76$ cm^3 **b.** 1,667 L environ
2. Les 22 billes de snooker occupent plus de place que les 16 billes de billard américain (1,568 L).

■ Jeux mathématiques

70 Il reste au départ $3\pi - 7{,}5 \approx 1{,}925$ L dans le vase. Les billes ont chacune un volume d'environ 0,268 L.

Il va donc faire entrer sept billes et c'est la huitième qui fera tout déborder. Donc Basile fera déborder le vase.

71 À vous de jouer !

72 Environ 3,274 m.

73 $\left(10\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{1000}{9}\sqrt{3} \approx 192{,}45\ \text{cm}^3$

Devoirs à la maison

74 **1.** Aire totale du cylindre : $8{,}06\pi\ \text{m}^2$
2. Aire totale de la pyramide : $12{,}47\ \text{m}^2$
3. Il faut 28 pots pour le cylindre et 14 pots pour la pyramide.

75 **1.** EGBF est une pyramide à base triangulaire. Elle a 4 sommets, 4 faces et 6 arêtes. L'autre solide est un cube tronqué. Il a 7 sommets, 7 faces et 12 arêtes.
2. a. et **b.** BEG est un triangle équilatéral de côté $5\sqrt{2}$ cm.
c. et **d.** À vérifier.
3. a. $37{,}5+12{,}5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **b.** $112{,}5+12{,}5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Avec un logiciel

Activité 1. La machine à volumes

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Cette activité a pour objectif de programmer le calcul du volume d'un cylindre, une boule et un cône à partir de leurs dimensions. La fin du problème permet d'établir le lien qu'il existe entre un cylindre, un cône et une boule de même hauteur et de même rayon du disque de base.
• ***Correction***
3. a. $268\ \text{m}^3$ **b.** 5,333 m **c.** 16 m
4. a. 6,2 cm
c. On remarque que le volume du cylindre est égal à celui de la boule plus celui du cône.
e. $(2R)\times\pi\times R^2 = \frac{(2R)\times\pi\times R^2}{3} + \frac{4}{3}\times\pi\times R^3$

Activité 2. L'aquarium de Chloé

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Le but de cette activité est d'utiliser le tableur pour résoudre une équation que les élèves ne savent pas résoudre puisque l'inconnue est au cube. Ici la procédure essai – erreur – ajustement permettra de trouver une valeur approchée de la solution, ce qui sera largement suffisant pour répondre au problème posé.
• ***Correction***
3. Environ 13,4 cm de rayon.
4. Oui car le diamètre de cette boule est d'environ 26,8 cm.

Activité 3. La boite de conserve

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Cette activité traite d'un problème d'optimisation classique ayant pour thème une boite de conserve de 1 L. Après avoir établi que c'est l'aire de la boite qui doit être minimale, le tableur permettra de chercher à tâtons la valeur du rayon qui permet d'obtenir cette aire minimale. On peut ensuite faire constater aux élèves que cela correspond au cas où la hauteur est égale au double du rayon. Ils pourront ainsi vérifier ce résultat en rentrant chez eux.
• ***Correction***
1. L'aire.
4. L'aire sera minimale quand le rayon sera d'environ 5,4 cm. La boite cylindrique aura alors une hauteur de 10,9 cm environ (quasiment égale au diamètre de la base donc, résultat que l'on pourrait prouver par le calcul).

Activité 4. Le calculateur de volume

• ***Considérations didactiques et mise en pratique***
Cette activité a pour but de programmer le calcul de différents solides. D'une part, elle permettra de faire un bilan des connaissances des élèves sur ce point et d'autre part, elle permettra de travailler au niveau de la programmation le concept de variable s'il en est encore besoin.
• ***Correction***
Corrections dans les programmes sur le site compagnon.

Tâches complexes

1. Distances sur le globe terrestre

Montpellier – Alger :	766 km
Montpellier – Tokyo :	10 130 km
Montpellier – New-York :	6 181 km
Alger – Tokyo :	10 801 km
Alger – New-York :	6 476 km
Tokyo – New-York :	10 845 km

2. Pour un feu de cheminée
Si l'on calcule la diagonale de la face avant de la cheminée, on va trouver à l'aide du théorème de Pythagore : $\sqrt{60^2+38^2} = \sqrt{5044} \approx 71$ cm. On pourrait donc penser que les bûches seront trop grandes. Cependant, on pourrait les faire rentrer en diagonale dans le pavé droit formé par la cheminée. Par exemple un bout en haut, au fond à droite et l'autre bout en bas, devant à gauche.
On calcule donc la longueur de cette diagonale intérieure du pavé :
$\sqrt{\sqrt{5044}^2+30^2} = \sqrt{5944} \approx 77$ cm ce qui permet de dire que l'on pourra bien faire entrer ces bûches dans la cheminée.

Tâches complexes – Problèmes de synthèse

I. Tâches complexes

1. Le déménagement

Pour un appartement de 94 m^2, il faut prévoir un volume de 60 m^3 à déménager.

Première proposition : Deux allers-retours sur un jour, soit 200 km parcourus avec chaque véhicule.

Véhicules	Prix de la location	Prix des kilomètres supplémentaires	Prix du carburant
1 véhicule 12 m^3	65 €	$0{,}31 \times 100 = 31$ €	$(7{,}8 \times 2) \times 1{,}025 = 15{,}99$ €
1 véhicule 20 m^3	105 €	$0{,}33 \times 100 = 33$ €	$(8{,}9 \times 2) \times 1{,}025 = 18{,}245$ €

Total : 268,24 €

Deuxième proposition : Trois allers-retours sur un jour et demi soit 300 km parcourus avec le véhicule.

Véhicules	Prix de la location	Prix des kilomètres supplémentaires	Prix du carburant
1 véhicule 20 m^3	105 € + 70 €	$0{,}33 \times 150 = 49{,}50$ €	$(8{,}9 \times 3) \times 1{,}025 = 27{,}3675$ €

Total : 251,87 €

Conclusion : La deuxième proposition coute 16,37 € de moins.

2. Les sms codés

La lettre… :	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
est remplacée par :	d	g	j	m	p	s	v	y	b	e	h	k	n	q	t	w	z	c	f	i	l	o	r	u	x	a

Voici le message de Romain codé :
ipfi : jtnwcpqmf il jp zlp e pjcbf ? e pfwpcp, e db nbf wklf m lqp mpnb yplcp d pjcbcp jp npffdvp ☹
il dlcdbf wl sdbcp wklf fbnwkp ☹ ☹ ☹

Le message de Nathan décodé :
Mdr, j'espère que tu as eu la bonne idée de garder tes résultats pour décoder ce message.
Allez un peu de maths ne va pas te faire de mal ☺

3. Les poèmes

– Le nombre du Document 1 à déterminer est :

$$\sqrt{10} \approx 3{,}16227766.$$

Exemples de phrases:
« Que d'envies et de rêverie produit chaque espoir. »
« Ils m'aident en me rendant service chaque samedi.»
– Le nombre du Document 2 à déterminer est :

$$\frac{15}{7} \approx 2{,}14285714$$

Exemples de phrase :
« Et l'aube va éclairer notre village d'ocre »
« Il a pris la décision : enfin sourire à tout. »

4. L'éclairage de l'allée

$9\times1+3\times1+\frac{1}{4}\times\pi\times1^2 \approx 12{,}8$, l'aire de l'allée est de 12,8 m^2.

En faisant des tests successifs, on peut choisir une hauteur de 2 m.

$2 \times \tan 25 \approx 0{,}93$, le rayon du demi-disque éclairé au sol mesure environ 0,93 m.

$4\times\frac{1}{2}\times\pi\times0{,}93^2 \approx 5{,}43$, l'aire éclairée par les quatre lampes est de 5,43 m^2. $\frac{5{,}43}{12{,}8} \approx 0{,}42$.

Conclusion : Si on choisit de fixer les lampes à 2 m de hauteur, la surface éclairée directement par les quatre lampes correspond à environ 42 % de la suface de l'allée.

5. Le daltonisme

• Si le père de l'enfant de Lisa est daltonien (8 % des hommes)

Lisa / Père	Xd	Xs
Xd	Xd Xd	Xd Xs
Y	Xd Y	Xs Y

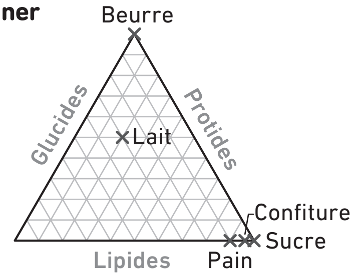
• Si le père de l'enfant de Lisa n'est pas daltonien (92 % des hommes)

Lisa / Père	Xd	Xs
Xd	Xd Xs	Xs Xs
Y	Xd Y	Xs Y

$0{,}08 \times \frac{1}{2} + 0{,}92 \times \frac{1}{4} = 0{,}27.$

Conclusion : Si Lisa a des enfants plus tard, la probabilité qu'ils soient daltoniens est donc de $\frac{27}{100}$.

6. Le petit déjeuner



Le petit déjeuner d'Hugo :

¼ litre de Lait	$60 \times 2{,}50 = 150$ kcal
2 sucres	$400 \times 0{,}10 = 40$ kcal
2 tranches de pain	$250 \times 0{,}70 = 175$ kcal
15g de beurre	$760 \times 0{,}15 = 114$ kcal
40g de confiture	$270 \times 0{,}40 = 108$ kcal
Total	587 kcal

$\frac{25}{100} \times 3\,000 = 750$ kcal

Conclusion : Le petit déjeuner d'Hugo lui apporte moins des 25 % de ses besoins journaliers.

7. La régate

Les trajectoires du voilier forment des triangles isocèles. En traçant les hauteurs de ces triangles, on peut utiliser la trigonométrie pour calculer les distances parcourues.

	Trajet 1	Trajet 2	Trajet 3
Distance aller	$\frac{0{,}75}{\cos 40} \times 2 \approx 1{,}958$ M	$\frac{0{,}75}{\cos 35} \times 2 \approx 1{,}831$ M	$\frac{0{,}75}{\cos 30} \times 2 \approx 1{,}732$ M
Distance retour	1,5 M	1,732 M	1,958 M

	Trajet 1	Trajet 2	Trajet 3
Temps aller	$\frac{1{,}958}{6{,}8} \approx 0{,}2879$ h	$\frac{1{,}831}{6{,}5} \approx 0{,}2817$ h	$\frac{1{,}732}{6{,}5} \approx 0{,}3039$ h
Temps retour	$\frac{1{,}5}{5{,}5} \approx 0{,}2727$ h	$\frac{1{,}732}{7} \approx 0{,}2474$ h	$\frac{1{,}958}{8} = 0{,}24475$ h
Total	0,5606 h soit 33,636 min	0,5291 h soit 31,746 min	0,54865 h soit 32,919 min

Conclusion : Le trajet 2 a été parcouru le plus rapidement.
La trajectoire la plus rapide serait composée de l'aller du trajet 2 et du retour du trajet 3.

II. Problèmes de synthèse

Problème 1. La sculpture

Chapitres utilisés : 3 et 9

1. a. En traçant la perpendiculaire à (DE) passant par C, on se place dans un triangle rectangle pour calculer CE.

$CE = \sqrt{(35^2 + 10^2)} = \sqrt{1325} \approx 36{,}4$ cm .

b. $AE = AC + 36{,}4$.

c. En utilisant le théorème de Thalès, on a :

$\frac{AC}{AC + 36{,}4} = \frac{20}{30}$ d'où $AC = 72{,}8$ cm et $AE = r = 109{,}2$ cm.

2. a. $2 \times \pi \times 30 = 60\pi$.

La valeur exacte de la circonférence est 60π cm.

b. $2 \times \pi \times 109{,}2 = 218{,}4\pi$.

La longueur du cercle de rayon AE est $218{,}4\pi$.

$\frac{60\pi}{218{,}4\pi} \approx 0{,}275$. Le rapport est bien d'environ 27,5 %

c. $0{,}275 \times 360 \approx 99$, la mesure de l'angle α est environ 99°.

Problème 2. Le récupérateur d'eau

Chapitres utilisés : 4, 5 et 7

1. $120 \times 100 \times 95 = 1\,140\,000$.

Le volume de la cuve est de 1 140 000 cm^3.

2. $V(x) = 120 \times 100 \times x = 12\,000\,x$.

Le volume est obtenu en cm^3.

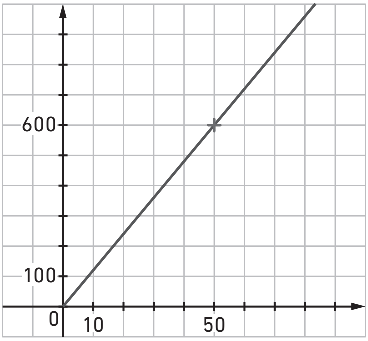
3. a. La fonction f permet d'obtenir le volume en litre car 1 000 cm^3 = 1 L.

b. x varie de 0 à 95 cm. **c.** (voir ci-après)

4. Durant l'année 1, il y a eu 310,1 mm de précipitations de février à juin ; durant l'année 2, il y a eu 425 mm de précipitations ; durant l'année 3, 439,3 mm et durant l'année 4, 222,7 mm.

$\frac{310{,}1 + 425 + 439{,}3 + 222{,}7}{4} = 349{,}265$ mm , soit environ 35 cm d'eau.

$f(35) = 420$, M. Averse peut espérer avoir 420 L d'eau dans sa cuve.



b. La hauteur d'eau atteint 35 cm alors que la cuve a une hauteur de 95 cm. En augmentant la surface de collecte d'eau de pluie (par exemple en raccordant les gouttières d'un toit à la cuve), on augmente le volume d'eau récupérée.

Problème 3. La rampe de garage

Chapitre utilisé : 10

1. a. • $\frac{2,3\times 100}{25} = 9,2$, il faut prévoir au minimum 9,2 m entre le portail et la maison.

b. • $\tan\alpha = \frac{2,3}{9,2}$, donc $\alpha \approx 14°$, l'angle de la rampe avec l'horizontale mesure au maximum 14°.

2. • $\tan 10 = \frac{2,3}{d}$, $d \approx 13,0$, la distance entre la maison et le portail est alors d'environ 13,0 m.

• $\sin 10 = \frac{2,3}{l}$, $l \approx 13,2$, la longueur de la rampe est alors d'environ 13,2 m.

• $\frac{2,3}{13,0} \approx 0,177$, la pente est d'environ 17,7 %.

Problème 4. L'exercice de M. Mathétic

Chapitres utilisés : 1 et 2

1. On ne peut pas généraliser à partir d'exemples.

2. a. Un nombre impair s'écrit $2 \times n + 1$ et le nombre impair suivant $2 \times n + 3$.

b. $(2n+1)^2 - (2n+3)^2 = 8n + 8 = 8(n+1)$.

c. Cette justification permet de conclure que c'est vrai pour n'importe quelle valeur de n.

Problème 5. Les boites

Chapitres utilisés : 10 et 11

1. a. $3,5 + \sqrt{(3,5^2 - 2^2)} + 1,6 \approx 8$, soit 8 cm de hauteur pour la boite .

Les dimensions minimales au mm près d'une boite pouvant contenir une boule à neige sont : 7 cm × 7 cm × 8 cm.

b. $1 + \sqrt{(2^2 - 1^2)} + \sqrt{(2^2 - 1^2)} + 1 \approx 5,5$, soit 5,5 cm de hauteur pour la boite.

Les dimensions minimales au mm près d'une boite pouvant contenir le lot de bougies sont : 6 cm × 11,5 cm × 8 cm.

2. a. $\frac{4}{3} \times \pi \times 3,5^3 + (\pi \times 2,2^2 \times 1,6 - \pi \times 2^2 \times 1,6) \approx 183,82$, le volume occupé par la boule à neige est 183,82 cm³.

$\frac{183,82}{7\times 7\times 8} \approx 0,47$. La boule à neige occupe environ les 47 % de la boite.

b. $8 \times (\pi \times 12 \times 11,5) \approx 289,03$. Le lot de bougies a un volume d'environ 289,03 cm³. $\frac{289,03}{6\times 11,5\times 5,5} \approx 0,76$.

Le lot de bougies occupe environ les 76 % de la boite.

Problème 6. Le marché

Chapitre utilisé : 7

1. a. La formule écrite dans **D2** est « =B2*C2 ».

b. Il y a six produits pairs sur ces 10 lancers, donc la fréquence d'obtention d'un produit pair est $\frac{6}{10} = 0,6$.

2. a. $\frac{721}{1000} = 0,721$ et $\frac{3\,797}{5\,000} = 0,7594$. Les fréquences sont respectivement 0,721 et 0,7594.

b. La formule écrite dans **B3** est « =B2/D2 », celle écrite dans **B7** est « =B6/D6 ».

3. a.

1er dé / 2e dé	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	1	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

b. La probabilité qu'elle range la chambre de son frère si elle joue est $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

c. Plus le nombre de lancers simulés est grand, plus la fréquence d'obtention de produits pairs est proche de la probabilité calculée précédemment.

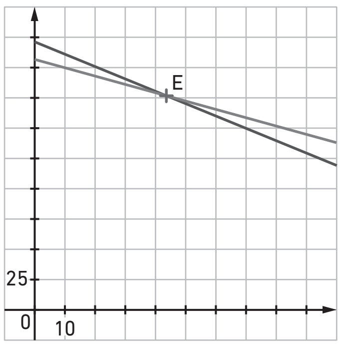
Problème 7. La FCM

Chapitres utilisés : 2, 3 ou 5

1.

	Élodie (25 ans)	Son père (55 ans)
Formule 220 – âge	195	165
Formule 207 – 0,7 × âge	189,5	168,5

2. On peut poser deux fonctions : $f : x \mapsto 220 - x$ et $g : x \mapsto 207 - 0,7\,x$.



Les coordonnées du point d'intersection sont :

E (43,33 ; 176,67)

Avec la nouvelle formule, la FCM est revue à la hausse à partir de 43 ans et 4 mois.

Problème 8. Les barreaux de fenêtres

Chapitre utilisé : 9

Pour la fenêtre en forme de losange

En utilisant le théorème de Thalès, on obtient :

$$40+\left(40\times\frac{2}{3}\right)\times 2+\left(40\times\frac{1}{3}\right)\times 2=120.$$

Pour cette fenêtre, il faut prévoir une longueur de barreaux de 120 cm.

Pour la fenêtre semi-circulaire

En utilisant le théorème de Pythagore dans des triangles rectangles qui ont pour hypoténuse un rayon du demi-cercle, on obtient : $45+2\sqrt{(45^2-15^2)}+2\sqrt{(45^2-30^2)}\approx 197$.

Pour cette fenêtre, il faut prévoir une longueur de barreaux d'environ 197 cm.

Problème 9. La consommation d'air

Chapitres utilisés : 5 et 6

1. a.

Profondeur (en m)	10	20	30	40	50
Consommation d'air (en L/min) lors d'un effort modéré	24	36	48	60	72

b. Lors d'un effort modéré, la consommation d'Amandine est de : 12 L/min à la surface ;
30 L/min à 15 m de profondeur ;
32,4 L/min à 17 m de profondeur.

c. $f(x)=1{,}2\,x+12$.

2. $\frac{72}{24}=3=1+\frac{200}{100}$, l'augmentation de la consommation est de 200 %.

3. $\frac{2400}{24}=100$; $\frac{2400}{72}\approx 33{,}3$; $\frac{2400}{200}=12$.

À 10 m de profondeur, avec 2 400 L d'air à disposition, l'autonomie d'Amandine est de :

– 100 min soit 1h40 min lors d'un effort modéré ;

– environ 33 min lors d'un effort soutenu ;

– 12 min en condition d'essoufflement.

Problème 10. La batterie d'ordinateur

Chapitres utilisés : 4, 5 et 6

1. a. La batterie est complètement chargée à 17 h et de 19h50 à 20h45.

b. À 18 h, la batterie est chargée à 60 %.

2. Phase 1 : Jeu, ordinateur non branché.

Phase 2 : Tableur, ordinateur non branché.

Phase 3 : Ordinateur éteint, en charge.

Phase 4 : Ordinateur éteint, en charge ou Ordinateur éteint, non branché.

Phase 5 : Jeu, ordinateur non branché.

Phase 6 : Ordinateur éteint, non branché.

3. a. Lorsque Jules joue sur son ordinateur, la batterie perd 40 % de charge en 1 h donc perdra 100 % de charge en 2h30 min.

b. Lorsque Jules utilise un tableur, la batterie perd 16 % de charge en 40 min donc perdra 100 % en 4 h 10 min.

4. La batterie a gagné 56 % de charge en 70 min donc mettra 2h05 min à se recharger intégralement.

Problème 11. La parcelle de terrain

Chapitres utilisés : 6 et 9

1. Avec le théorème de Pythagore, on calcule :

$$\sqrt{(6{,}25^2+12^2)}\approx 13{,}53$$

La diagonale de la maison mesure environ 13,53 m.

Avec le théorème de Thalès ou les triangles semblables, on a :

$$\frac{6{,}25}{\text{largeur}}=\frac{12}{\text{longueur}}=\frac{13{,}53}{15+13{,}53}$$

On obtient une largeur d'environ 13,18 m et une longueur d'environ 25,30 m.

2. Largeur $\times\,0{,}90\times$ longueur $\times\,1{,}10=$ Aire $\times\,0{,}99$.

L'aire de la parcelle va diminuer de 1 %, ils ont donc intérêt à négocier le prix de vente proposé initialement.

Problème 12. Les vitesses du vélo

Chapitres utilisés : 1 et 6

1. a. PPCM (50 ;12) = 300 et $300=50\times 6$.

Alex doit faire 6 tours de pédale.

b. $50:12=\frac{25}{6}$, un tour de pédale entraîne $\frac{25}{6}$ tours de roue.

c. $\frac{25}{6}\times 0{,}7\times\pi\approx 9{,}16$, le développement est d'environ 9,16 m.

2. a. PPCM (30 ; 27) = 270 et $270=30\times 96$, Alex doit faire 9 tours de pédale.

b. $30:27=\frac{10}{9}$, un tour de pédale entraîne $\frac{10}{9}$ tours de roue.

c. $\frac{10}{9}\times 0{,}7\times\pi\approx 2{,}44$, le développement est d'environ 2,44 m.

3. a. $1\,000:9{,}16\approx 109$. Avec le réglage 50/12, il faut faire 109 tours de pédale pour parcourir 1 km.

$1\,000:2{,}44\approx 410$. Avec le réglage 30/27, il faut en faire 410.

b. On en conclut que le premier réglage est plus approprié en descente et le deuxième en montée.

Problème 13. Les formats de papier

Chapitres utilisés : 3 et 6

1. Une feuille de format A4 a une aire de $\frac{1}{16}$ m^2.

2. a. Par l'homothétie qui transforme le format A4 en format A3, le point C' a pour image le point C et le point A a pour image A donc les points A, C et C' sont alignés.

b. En utilisant le théorème de Thalès, on obtient $\frac{AD'}{AD}=\frac{DC'}{DC}$ soit $\frac{h}{2l}=\frac{l}{h}$ d'où $h^2=2\,l^2$.

c. On en déduit que $h=\sqrt{2}l$ car h et l sont positifs.

d. $\frac{h}{l}=\sqrt{2}\approx 1{,}41$ soit $1+\frac{41}{100}$. En passant du format A4 à A3, on augmente les longueurs d'environ 41 %.

3. $l^2=\frac{1}{16\times 1{,}41}=\frac{1}{22{,}56}$ donc $l=\sqrt{\frac{1}{22{,}56}}\approx 0{,}21$ et $h\approx 1{,}41\times 0{,}21\approx 0{,}296$.

On retrouve à 1 mm près les dimensions du format A4 qui sont 21 cm sur 29,7 cm.

N° projet : 10219478 - Dépôt légal : août 2016 - Imprimé en France par Laballery