Chapitre 16 :

Puissances

I. Puissances

1. Exemple d'approche

Sept voitures transportent chacune sept personnes qui possèdent chacune un sac avec sept poches. Dans chaque poche se trouve sept enveloppes contenant chacune sept photographies.

Quel est le nombre total de photographies transportées ? Donne le résultat sans effectuer de calculs.

Il y a donc 7 x 7 x 7 x 7 x 7 photographies.

2. Puissances positives

Définition :

$$a^n = \underbrace{a \times \ \ldots \ \times a}_{n\,fois}$$ se lit « a puissance n ».

Remarque : $a^0 =$ 1 et $a^1 =$ a

Exemples :

$2^5 =$ 2 x 2 x 2 x 2 x 2 $=$ 32

$5^3 =$ 5 x 5 x 5 $=$ 125

$(-4)^2 =$ (- 4) x (- 4) $=$ 16 alors que $-4^2 =$ - 4 x 4 $=$ - 16

$10^3 = \underline{10 \times 10 \times 10} = \underline{1\,000}$

$10^7 = \underline{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = \underline{10\,000\,000}$

$10^{10} = 1\underbrace{0\,000\,000\,000}_{10\ zéros}$

$10^n = 1\underbrace{0\ \dots\ 0}_{n\ zéros}$

4. Puissances négatives

Définition :

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\,fois}}$$

Exemples :

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25 \qquad 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0,001 \qquad 10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10\,000\,000} = 0,000\,000\,1$$

$$10^{-9} = \underbrace{0,000\,000\,00}_{9\ zéros}1 \qquad 10^{-n} = \underbrace{0, \ldots 0}_{n\ zéros}1$$

II. Opérations sur les puissances

Propriété :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^n)^m = a^{n\times m}$$

Exemples :

$$3^5 \times 3^4 = 3^{5+4} = 3^9$$

$$\frac{3^9}{3^5} = 3^{9-5} = 3^4$$

$$(2^5)^2 = 2^{5\times 2} = 2^{10}$$

$$6^8 \times 6^{-5} = 6^{8+(-5)} = 6^3$$

$$\frac{(-4)^{-3}}{(-4)^5} = (-4)^{-3-5} = 3^{-8}$$

$$(6^3)^{-2} = 6^{3\times(-2)} = 6^{-6}$$

$$10^3 \times 10^{-10} = 10^{3+(-10)} = 10^{-7}$$

$$\frac{10^3}{10^{-5}} = 10^{3-(-5)} = 10^8$$

$$(5^{-4})^{-6} = 5^{-4\times(-6)} = 5^{24}$$

II. Multiplication

Règles :

Pour multiplier un nombre décimal par 10^1 ou 10^2 ou 10^3 ..., il faut décaler la virgule de **1** rang ou **2** rangs ou **3** rangs vers la ___droite___ et compléter par des zéros si besoin.

Pour multiplier un nombre décimal par 10^{-1} ou 10^{-2} ou 10^{-3} ..., il faut décaler la virgule de **1** rang ou **2** rangs ou **3** rangs vers la ___gauche___ et compléter par des zéros si besoin.

Exemples :

$6{,}562 \times 10^2 =$ 656,2

$65{,}6 \times 10^{-1} =$ 6,56

$0{,}0025 \times 10^3 =$ 2,5

$0{,}54 \times 10^{-2} =$ 0,0054

Définition :

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est l'unique écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$, où :

- a est un nombre décimal compris entre 1 et 10, 10 étant exclu ;
- n est un nombre entier relatif (positif ou négatif).

Exemples :

$4\,532 = 4,532 \times 10^3$

$6\,200\,000 = 6,2 \times 10^6$

$0,00256 = 2,56 \times 10^{-3}$

$0,00000000075 = 7,5 \times 10^{-10}$

$0,36 = 3,6 \times 10^{-1}$

$846\,000\,000\,000 = 8,46 \times 10^{11}$

$1\,242 \times 10^4 = 1,242 \times 10^3 \times 10^4 = 1,242 \times 10^7$